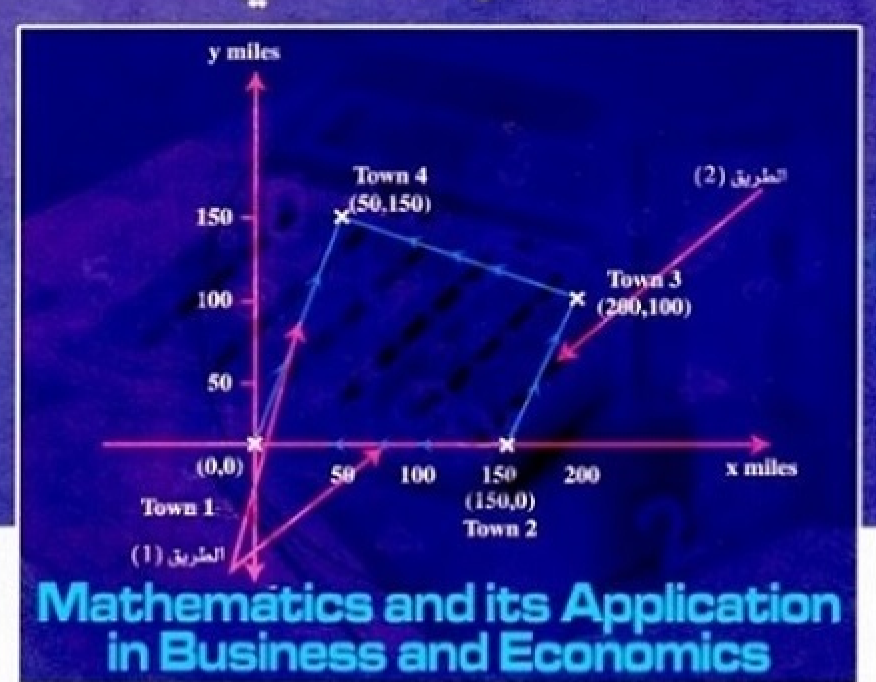
د. محمود مهدي البياتي

د. دلال القاضي



الرياضيات وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والإقتصادية

الرياضيات وتطبيقاتها

الرياضيات وتطبيقاتها

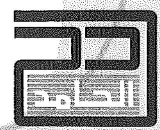
في العلوم الإدارية والإقتصادية

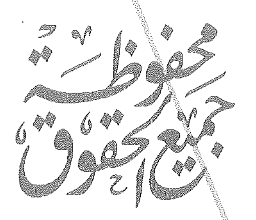
إعداد

د. محمود مهدي البياتي
أستاذ مشارك/تحليل بيانات
جامعة بغداد/ جامعة عمان الأهلية

د. دلال القاضي
أستاذ مشارك/ إحصاء رياضي
جامعة بغداد/ جامعة عمان الأهلية

الطبعة الأولى
1426هـ-2006م





رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2005/7/1625)
415
البياتي، محمود
الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية/ محمود البياتي، دلال القاضي
عمان: دار ومكتبة الحامد للنشر والتوزيع.
الطبعة الأولى 2006م ، (336) صفحة
ر.إ: (2005/7/1625م)
الواصفات:/ الرياضيات// العلوم الإدارية// الاقتصاد// إدارة الأعمال/
* تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية
* رقم الإجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر 2005/6/1550
* (ردمك) ISBN 9957-32-095-5



دار الحامد للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: (5231081-6-962) - فاكس: (5235594-6-962+) - نقال: (795301601-962+)

ص.ب: 366 الجبيهة - الرمز البريدي 11941 عمان - الأردن

E-mail: daralhamed@yahoo.com   E-mail: dar_alhamed@hotmail.com

التصميم والإخراج الصحفي/لينو

المحتويات

المحتويات

الفصل الثالث
المتباينات

الفصل الرابع
الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية

المحتويات

المحتويات

المحتويات

الفصل الثامن
التكامل وتطبيقاته

المقدمة

على الرغم من توفر العديد من الكتب في مادة الرياضيات، إلا أن أغلبها باللغة الإنكليزية مما يعني افتقار المكتبات في الجامعات العربية إلى كتب في الرياضيات وباللغة العربية. وإن توفرت بعض من المراجع في اللغة العربية فمعظمها تفتقر إلى المصطلحات الإنكليزية وقد تستخدم بعضها الرموز العربية أيضاً. كما وأن أغلب الكتب المتوفرة سواءً كانت باللغة العربية أو الإنكليزية تعتبر نوعاً ما متخصصة، بمعنى أن الكتب قد تكون في موضوع معين من الرياضيات مثلاً التفاضل والتكامل. وكذلك فإن أغلب هذه المراجع تفتقر للتطبيقات العملية لتلك المفاهيم الرياضية. هذا الأمر حدى بالمؤلفين التفكير في وضع كتاب في مادة الرياضيات لتلافي الصعوبات في استخدام المراجع الرياضية.

هذا الكتاب يوفر المادة باللغتين العربية والإنكليزية، أي أن جميع المفردات والخطوات عرضت باللغتين، كما وأن الأمثلة والتطبيقات استخدمت فيها الرموز الإنكليزية.

كذلك فإن الكتاب يعرض، وبشكل وافٍ، أكثر من موضوع في الرياضيات. فهناك فصل عن المصفوفات وفصل عن الدوال وتطبيقاتها وفصل عن التفاضل وفصل آخر عن التكامل إضافة للعديد من الفصول الأخرى المختلفة وذلك بغية التعرف على المفاهيم الرياضية المتنوعة.

وتضمن الكتاب كذلك العديد من الأمثلة التطبيقية وبالأخص التطبيقات الإدارية والاقتصادية والتي تعتبر النافذة للإلمام بأهمية المفاهيم الرياضية في الحياة العملية واستخداماتها.

وبذلك فإن هذا الكتاب يعتبر مرجعاً هاماً وأساسياً للكثير من المفاهيم الرياضية

الواجب التعرف عليها ودراستها من قبل الراغبين في استخدامها وكذلك للطلبة اللذين يدرسون هذه المادة كمتطلب في اختصاصاتهم، وعلى وجه الخصوص طلبة الإدارة والاقتصاد.

ولقد تم وضع الكتاب ليكون مرجعاً مهماً ومقرراً لتدريس مادة الرياضيات في كلية العلوم الإدارية والمالية في جامعة عمان الأهلية وكذلك في كليات العلوم الإدارية والمالية في بقية الجامعات، آملين أن يكون هذا الكتاب لبنة إضافية مفيدة للتدريس في الجامعات العربية وأن يلقى القبول من الجميع.

وفقنا الله جميعاً لخدمة العلم

المؤلفين

الفصل الأول

1

مراجعة في الجبر

وببساطة فإن معنى الأعداد الطبيعية واضح في أنه يمثل الأعداد الصحيحة موجبة والتي تكون قيمها أكبر من صفر (أو تسمى أرقام العد والتي تستخدم في عد Positive integers greater than zero) وكذلك يمكن ملاحظة أن عمليتي جمع addition والضرب multiplication للأعداد الطبيعية يعطي نتائج هي أيضاً عداد طبيعية.

Addition and multiplication for Naturals numbers are also Natura numbers.

فمثلاً $4 = 3 + 1$ وكذلك $(1)\ (3) = 3$

أما عن عملية الطرح Subtraction فإن النتائج لا تعطى دائماً أعداد طبيعية

Subtraction for Naturals numbers are not always Natural numbers

فمثلاً $-2 = 3 - 1$. لذلك علينا التعرف على أعداد أخرى أكبر وأوسع من عنى الأعداد الطبيعية وهناك الأعداد الصحيحة Integer Numbers.

We notice that the Integer Numbers are the following numbers

…. , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , …

والتي يتضح أنها تعني جميع الأعداد الطبيعية وكذلك مماثلاتها من القيم سالبة وأيضاً قيمة الصفر.

We notice that Integer Numbers are all positive and negativ numbers and also the zero value.

ويلاحظ أيضاً بأن جمع وطرح وضرب الأعداد الصحيحة يعطي أعداد صحيحة.

Addition, subtraction, and multiplication for Integer numbers ar also Integer numbers.

مثلاً $4 = 3 + 1$ ، $-2 = 3 - 1$ وكذلك $(1)\ (3) = 3$ وجميعها أعداد صحيحة.

أمـــا عـــن القسمة division فإن النتائج لا تمثل أعداد صحيحة دائما وأحيانا تكون الأعداد غير صحيحة.

Division for Integer numbers are not always an Integer numbers.

مـــثلاً $\frac{1}{3} = 3 \div 1$ وبالتالي علينا التعرف على أعداد جديدة تسمى الأعداد النسبية Rational numbers والتي تعرض بشكل نسب.

Rational numbers which are formed by taking ratios of Integers of the form $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ where a and b are Integers.

ومن أمثلة الأعداد النسبية:

$$\frac{6}{6}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{-2}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{-3}{4}\ ,\ \frac{9}{3}\ ,\ \frac{-3}{9}$$

وغيـــرها من أشكال قسمة عددين صحيحين وبشرط عدم القسمة على صفر لأن ذلك يعطي نتائج غير معرفة Undefined Results.

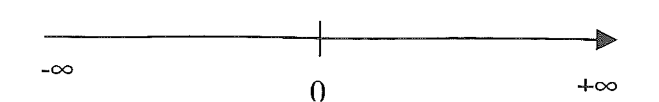
ويلاحظ هنا بأن بعض نتائج القسمة تمثل أعداد صحيحة مثل $\frac{9}{3} = 3$ وذلك يعني أن الأعداد الصحيحة هي أعداد نسبية وليس العكس صحيح.

Some of the results of the divisions are integers which means that all integers are Rational numbers but not vise versa.

أما بعض نتائج القسمة الأخرى فلا تمثل أعداد صحيحة بل يطلق عليها اسم الأعداد النسبية عامة واسم الكسور fraction إذا كان البسط numerator أقل less than من المقام Denominator ومن أمثلة ذلك:

$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{-2}{3}\ ,\ \frac{-3}{4}\ ,\ \frac{3}{9}$$ وغيرها.

أمـــا الأعـــداد التي لا يمكن كتابتها بشكل نسبة فتسمى الأعداد الغير نسبية Irrational numbers ومـــنها $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{7}$ ، π وغيرها مع أنها بصورة عامة قليلة مقارنة مع ما تكونه الأعداد النسبية.



هـــذا الإحداثـــي السيني يستخدم بشكل واسع لرسم النقاط والأشكال المختلفة وسيتم مناقشة ذلك وبالتفصيل لاحقاً.

أما عن خصائص الأعداد الحقيقية Properties of Real Numbers فهي:

1- Commutative property **الخاصية التبادلية**

If a , b are real numbers, then:

$$a + b = b + a \quad , \quad a\,b = b\,a$$

for example:
$1 + 3 = 3 + 1 = 3$
$1 + (-3) = (-3) + 1 = -2$
$(1)\,(3) = (3)\,(1) = 3$

2- Associative property **الخاصية التشاركية**

If a , b, and c, are real numbers, then:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (a\,b)\,c = a\,(b\,c)$$

for example:
$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$
$2 \,.\, (3 \,.\, 4) = (2 \,.\, 3) \,.\, 4 = 24$

3- Distributive property **الخاصية التوزيعية**

If a , b , and c are real numbers, then:

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c \quad , \quad (b + c)\,a = b\,a + c\,a$$

for example: $2\,(3 + 4) = (2)\,(3) + (2)\,(4) = 14$

4- Identity elements:

if a is real number, then:

$$a + 0 = a \quad , \quad a \,.\, 1 = a$$

it is abvious that if we add any real number to zero we get the same number, and also if we multiply any real number by one we get same number.

5- Inverse property **الخاصية العكسية**

If a is a real number, then $-a$ is called the negative of a , also the reciprocal of a is a^{-1} and we have:

$$a + (-a) = 0 \quad , \quad a \,.\, a^{-1} = 1$$

for example: if $a = 3$ then $-a = -3$ and $a^{-1} = \frac{1}{3}$

and we have

$$3 + (-3) = 3 - 3 = 0 \quad \text{and} \quad 3 \,.\, \frac{1}{3} = 1$$

6- Order property **خاصية الترتيب**

if a , b are real numbers, and $b - a$ is positive, then $b - a > 0$ which means that $b > a$ or $a < b$.

We will state some theorems (without proof) for ordering properties as follows:

a) if $a < b$ and $b < c$, then $a < c$

for example: $1 < 2$ and $2 < 3$ then $1 < 3$

b) If $a < b$, then $a + c < b + c$

also $a - c < b - c$

for example: $2 < 3$, then $2 + 1 < 3 + 1$ since $3 < 4$

also $2 < 3$, then $2 - 1 < 3 - 1$ since $1 < 2$

c) If $a < b$, then $a\,c < b\,c$ if c positive , and $c \neq 0$

also $a\,c > b\,c$ if c negative , and $c \neq 0$

for example: $2 < 3$, then $(2)\,(2) < (3)\,(2)$ since $4 < 6$

but, if $2 < 3$, then $(2)\,(-2) > (3)\,(-2)$ since $-4 > -6$

d) If $a < b$ and $c < d$, then $a + c < b + d$

for example: if $1 < 2$ and $3 < 4$, then $1 + 3 < 2 + 4$ since $4 < 6$

e) If a and b are both positive or both negative, and

if $a < b$, then $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

for example: if $2 < 3$, then $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

g) $(\frac{1}{2})(\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$

1-3 النسب (الكسور) Ratios (Fractions):

لقد تم تعريف النسبة، وكما رأينا سابقاً على أنها الشكل $\frac{a}{b}$ ، حيث أن a ، b عددان حقيقيان وأن $b \neq 0$.

The ratio $\frac{a}{b}$ is defined to be the quotient of the two real numbers a and b, where $b \neq 0$.

وعــندما يكون المقام denominator b أكبر من البسط numerator a عندئذٍ تُعرف النسبة على أنها الكسر Fraction.

When the numerator a is less than the denominator b, then the ratio $\frac{a}{b}$ is called the fraction.

ويمكن ملاحظة أن النسبة $\frac{a}{b}$ تكتب أيضاً بالشكل $a\ b^{-1}$ ، حيث أن $b^{-1} = \frac{1}{b}$ والذي يسمى بالمعكوس inverse.

$\frac{a}{b}$ is defined as the product of a and the inverse of b, i.e $\frac{a}{b} = a\ b^{-1}$.

أما عن العمليات الجبرية الخاصة بهذا النوع من الأعداد فهي كالآتي:

1- Multiplication of Fractions:

$$(\frac{a}{b})(\frac{c}{d}) = \frac{ac}{bd}$$

That is, the product of two fractions is obtained by the multiplication the two numerators divided by the multiplication of the two denominators.

2- Division of Fractions:

$$(\frac{a}{b}) \div (\frac{c}{d}) = (\frac{a}{b})(\frac{d}{c}) = \frac{ad}{bc}$$

That is, the quotient of two fractions is obtained by multiplying the first fraction by the inverse of the second fraction.

3- Cancellation of common factors:

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc} \quad , \quad c \neq o$$

That is, the fraction would be the same if the numerator and the denominator of the fraction is multiplied or divided by any nonzero number.

4- Addition and Subtraction of Fractions:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

similarly:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

That is, if two fractions have a common denominator, they may be added (or subtracted) by adding (subtracting) their numerators.

When, we have to add (or subtract) two fractions with different denominators, then we have to use a common denominator for both fractions. To keep the numbers as small as possible, we choose the smallest possible common denominator which is called the least common denominator.

That is, if $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ are two fractions, then:

$$\frac{a}{b}\mp\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\mp\frac{cb}{bd}=\frac{ad\mp cb}{bd}$$

ومع بساطة القوانين السابق ذكرها للتعامل مع الكسور والنسب بصورة عامة ولكن الأمثلة التي سيتم ذكرها في هذا المبحث ستكون شاملة وتتضمن كثير من التفاصيل التي لا نستطيع رؤيتها من خلال القانون فحسب بل علينا التعامل مع المعطيات والتركيز على الصورة الصحيحة لها وسيتم ذلك كالآتي:

d) $\frac{2y}{3x}-\frac{4}{3x}+\frac{5z}{3x}=\frac{2y-4+5z}{3x}$

مثال 9

بسط كل مما يلي :Simplify the following

a) $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$

لإيجـــاد ناتج جمع $\frac{5}{6}$ و $\frac{1}{3}$ يجب علينا في البداية توحيد المقام ليكون المقدار نفسه وسنستخدم 6 ليكون المقام الموحد، وذلك يعني علينا ضرب الحد الثاني وهو $\frac{1}{3}$ في المقدار 2 لكل من البسط والمقام ليصبح $\frac{(1)(2)}{(3)(2)}=\frac{2}{6}$ ومن ثم يتم جمعه مع المقدار الأول $\frac{5}{6}$ ليكون الناتج:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}+\frac{(2)(1)}{(2)(3)}=\frac{5}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5+2}{6}=\frac{7}{6}$$

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}-\frac{(1)(2)}{(3)(2)}=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}$

باستخدام نفس الأسلوب السابق لتوحيد المقامات.

c) $\frac{5}{6}+\frac{3}{7}=\frac{(5)(7)}{(6)(7)}+\frac{(3)(6)}{(7)(6)}=\frac{35}{42}+\frac{18}{42}=\frac{35+18}{42}=\frac{53}{42}$

d) $\frac{5}{6}-\frac{3}{7}=\frac{(5)(7)}{(6)(7)}-\frac{(3)(6)}{(7)(6)}=\frac{35}{42}-\frac{18}{42}=\frac{35-18}{42}=\frac{17}{42}$

مثال 10

بسط المقدار التالي :Simplify of following

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$$

لإيجاد ناتج القسمة علينا أولاً إيجاد ناتج البسط كما يلي:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{(2)(2)}{(3)(2)}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4+1}{6}=\frac{5}{6}$$

وكذلك علينا إيجاد ناتج المقام كما يلي:

$$\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{(1)(2)}{(3)(2)}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2-5}{6}=\frac{-3}{6}$$

وبالتالي فإن ناتج حاصل القسمة سيكون:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{-3}{6}}=(\frac{5}{6})(\frac{-6}{3})=\frac{-5}{3}$$

مثال 11

بسط المقدار التالي Simplify the following:

$$\frac{7x-\frac{2x}{3}}{15y-\frac{y}{3}}$$

لإيجاد ناتج عملية القسمة علينا أولاً إيجاد ناتج البسط ليكون:

$$7x-\frac{2x}{3}=\frac{7x}{1}-\frac{2x}{3}=\frac{(7x)(3)}{(1)(3)}-\frac{2x}{3}=\frac{21x-2x}{3}=\frac{19x}{3}$$

وكذلك علينا إيجاد ناتج المقام ليكون:

$$15y-\frac{y}{3}=\frac{15y}{1}-\frac{y}{3}=\frac{(15y)(3)}{(1)(3)}-\frac{y}{3}=\frac{45y}{3}-\frac{y}{3}=\frac{45y-y}{3}=\frac{44y}{3}$$

وأخيراً علينا قسمة ناتج البسط على ناتج المقام ليصبح لدينا:

$$(\frac{19x}{3})\div(\frac{44y}{3})=(\frac{19x}{\cancel{3}})(\frac{\cancel{3}}{44y})=\frac{19x}{44y}$$

1-4 الأسس **Exponents**:

إذا كان m عدد صحيح موجب positive integer فإن a^m (وتقرأ a للقوة أو الأس m) a is raised to the power m تُعرف على أنها حاصل ضرب العدد a في نفسه بمقدار m من المرات.

That is,

$a^m = a . a . a \ldots a$ (m من المرات)

for example:

$$2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$$
$$3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$$

وهـنا نطلق اسم القوة أو الأس Power or exponent للرمز m ونطلق اسم الأساس base للرمز a

Definition:

If $a \neq 0$, then $a^0 = 1$, and if m is any positive integer (so that $-m$ is a negative integer), then:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

for example:

$$(-5)^0 = 1 \quad , \quad (\frac{3}{5})^0 = 1 \quad , \quad 3^0 = 1 \quad , \text{ also}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3.3} = \frac{1}{9} \quad and \quad (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{(-3)(-3)(-3)} = \frac{-1}{27}$$

أما عن خصائص الأسس **Exponent Properties**:

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$, except that if either m or n is negative, then $a \neq 0$.

That is, to multiply two powers with the same base we can add the two exponents.

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad a \neq 0$

That is, to divide one power by another with the same base, subtract the exponent in the denominator from the exponent in the numerator.

3) $(a^m)^n = a^{mn}$, $a \neq 0$ if m or n is negative or zero

That is, a power raised to a power is equal to the base raised to the product of the two exponents.

4) $(ab)^m = a^m b^m$, $ab \neq 0$ if $m \leq 0$

That is, the product of two numbers all raised to the mth power is equal to the product of the mth powers of the two numbers.

5) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$ and $a \neq 0$ if $m \leq 0$

That is, the quotient of two numbers all raised to the mth power is equal to the quotient of the mth powers of the two numbers.

الأمثلة التالية تمثل الحالات المختلفة للتعامل مع الأسس ومن خلال استخدام الخصائص التي تم ذكرها أعلاه كالآتي:

مثال 12

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) $3^5 . 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

b) $x^5 . x^3 = x^{5+3} = x^8$

c) $3^5 . 3^{-2} = 3^{5-2} = 3^3$

d) $x^5 . x^{-3} = x^{5-3} = x^2$

مثال 13

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

b) $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

c) $\frac{3^2}{3^5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

d) $\frac{x^3 \;.\; x^2}{x^5} = x^{3+2-5} = x^0 = 1$

مثال 14

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) $(3^3)^2 = 3^{3.2} = 3^6$

b) $(x^2)^3 = x^{2.3} = x^6$

c) $(x^2)^5 \,.\, (x^{-2})^3 = x^{2.5} \,.\, x^{-2.3} = x^{10} \,.\, x^{-6} = x^{10-6} = x^4$

مثال 15

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) $6^3 = (2.3)^5 = 2^5 \,.\, 3^5$

b) $(xy)^3 = x^3\, y^3$

c) $(x^2\, y^{-3})^4 = (x^2)^4 \,.\, (y^{-3})^4 = x^{2.4} \,.\, y^{-3.4} = x^8 \,.\, y^{-12} = \frac{x^8}{y^{12}}$

مثال 16

بسط المقادير التالية Simplify the following:

a) $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3}$

b) $(\frac{x}{y})^4 = \frac{x^4}{y^4}$

c) $(\frac{x^2}{y^3})^2 = \frac{(x^2)^2}{(y^3)^2} = \frac{x^{2.2}}{y^{3.2}} = \frac{x^4}{y^6}$

مثال 17

بسط المقدار التالي Simplify the following:

$$(x^{-1}+y^{-1})^{-1}(\frac{1}{xy})$$

يلاحـــظ أن المقدار أعلاه هو حاصل ضرب حدين ولإيجاد ذلك علينا إيجاد قيمة الحد الأول أولاً كالآتي:

$$(x^{-1}+y^{-1})^{-1}=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^{-1}=(\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy})^{-1}$$

$$=(\frac{y+x}{xy})^{-1}=\frac{xy}{x+y}$$

ومن ثم ضربه بالحد الثاني ليصبح الناتج:

$$(\frac{\cancel{xy}}{x+y})(\frac{1}{\cancel{xy}})=\frac{1}{x+y}$$

1.5 العمليات الجبرية Algebraic Operations:

ســـيتم في هذا المبحث تطبيق العمليات الرياضية السابق ذكرها في المباحث الســـابقة باســـتخدام المقاديـــر الجبرية Algebraic Expressions، حيث أن المقدار الجبري مثل x+3 أو $2x^2$-4x+5 وغيرها هو عبارة عن عدد من الحدود terms

Algebraic Expression is a statement or quantity consisting of one or more terms, for example x+3 has two terms, while $2x^2$-4x+5 has three terms, and so on.

In the term $2x^2$, the factor 2 is called the numerical coefficient and the factor x^2 is called the literal part of this term. The term 5 has no literal part and is called a constant term.

An expression containing only one term is called Monomial such as: $2x^2$, 5 , x , $\frac{x}{y}$, and xy.

An expression containing exactly two terms is called Binomial such as x+3 , $3\frac{x}{y}-2x^2$, and $3x+\frac{1}{4}$.

مثال 22

بسط المقدار التالي Simplify the following:

$$2 [3 x (4 - 2 x)] + 7 [(x - 3) (x + 2) - 3]$$

لإيجاد الناتج لدينا:

$$2 [3 x . 4 - 3 x . 2 x] + 7 [x (x + 2) - 3 (x + 2) - 3]$$
$$= 2 [12 x - 6 x^2] + 7 [x^2 + 2 x - 3 x - 6 - 3]$$
$$= 2 (12 x - 6 x^2) + 7 (x^2 - x - 9)$$
$$= 24 x - 12 x^2 + 7 x^2 - 7 x - 9$$
$$= -5 x^2 + 17 x - 9$$

مثال 23

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following:

a) $(x + 3)^2 = (x + 3) (x + 3) = x^2 + 3 x + 3 x + 9 = x^2 + 6 x + 9$

b) $(x-\frac{1}{2})^2 = (x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4}$

c) $(2 x - 5) (2 x + 5) = (2 x)^2 - (5)^2 = 4 x^2 - 25$

d) $(3 x - 2 y) (3 x + 2 y) = (3 x)^2 - (2 y)^2 = 9 x^2 - 4 y^2$

e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2 - 3 = -1$

f) $\frac{2x+4y^2}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{4y^2}{2} = x + 2y^2$

g) $\frac{6x^2+3y-2xy}{x} = \frac{6x^2}{x} + \frac{3y}{x} - \frac{2xy}{x} = 6x + 3\frac{y}{x} - 2y$

أما عن القسمة في حالة كون البسط مقدار جبري مقسوماً على مقدار جبري آخــر يمثل المقام فإن القسمة الطويلة هي المناسبة في هذه الحالة وذلك لأن تجزئة حدود البسط وقسمتها على المقام والتي كانت واضحة في العلاقة (6) السابقة والتي

تـــم تطبـــيقها فـــي الفـــرعين (f) و(g) من المثال السابق لم تعد مناسبة ولا تكفي بالغرض المطلوب لإيجاد الناتج لعملية تلك القسمة.

For the division of two algebraic expressions then long division would be the appropriate way if there are no common factor between the numerator (dividend) and the denominator (divisor).

وفي هذه الحالة علينا استخدام القسمة الطويلة حيث أن البسط يسمى المقسوم Dividend، أما المقام فيسمى المقسوم عليه Divisor وأن الناتج يسمى Quotient. وإن كانت القسمة الطويلة غير منتهية فهناك ما يسمى بالباقي Remainder وأخيراً فإن ناتج القسمة يتمثل بالعلاقة التالية:

$$\frac{Dividend}{Divisor} = Quotient + \frac{Remainder}{Divisor}$$

وسيتم توضيح معنى القسمة الطويلة بالأمثلة التالية:

مثال 24

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) 245 ÷ 5

وباتباع طريقة القسمة الطويلة لدينا:

```
                              49   <------  Quotient الناتج
Divisor المقسوم عليه --> 5 | 245  <------  Dividend المقسوم
                             20
                             --
                              45
                              45
                              --
                               0   <------  Remainder الباقي
```

وبالتالي فإن الجواب هو:

245 ÷ 5 = 49

ويعني ذلك أيضاً أن العدد a يعتبر عامل من عوامل العدد c إذا كان العدد c يقبل القسمة على العدد a بدون باقي، وكما تم ملاحظة ذلك من بعض الأمثلة لعمليات القسمة سابقاً.

a is said to be factor of c if c can be divided by a without a remainder.

For example: 2 and 3 are the factors for 6, since $(2)(3) = 6$,

also we notice that $6 \div 2 = 3$ and $6 \div 3 = 2$

وبنفس الأسلوب يمكن الحديث عن عوامل المقادير الجبرية، حيث أنه إذا كان أحد المقادير الجبرية يمثل حاصل ضرب مقدارين جبريين آخرين أو أكثر فإن تلك المقادير الجبرية تمثل عوامل المقدار الجبري الأصلي.

Similarly, if two (or more) algebraic expressions are multiplied together, then these expressions are said to be factors of the expression obtained as their product.

for example $x\,y$ is the product of x times y, then x and y are said to be factors of $x\,y$.

الطريقة المناسبة لكتابة المقدار بشكل حاصل ضرب عوامله تسمى التحليل إلى العوامل Factoring.

The process of writing a given expression as the product of its factors is called factoring the expression.

وكما تم التنويه إليه، يتضح أن عملية التحليل إلى العوامل Factoring هي طريقة معاكسة لعملية ضرب الحدود Multiplication of factors والتي تم شرحها سابقاً، وبالتالي فإن كثير من القوانين Rules والعلاقات المستخدمة في التحليل ستكون مستنبطة من قوانين الضرب السابقة. وهذه العلاقات سيتم ذكرها في هذا المبحث كالآتي:

The following are general methods for factoring:

1- Common Factors:

$$a x + b x = (a + b) x$$

2- Difference of two squares

$$a^2 - b^2 = (a- b) (a + b)$$

3- Sum or difference of two cubes:

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + a b + b_2)$$

4- Factoring a Quadratic form:

$x^2 + p x + q$, where p and q are constants using the fact that:

$(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b) x + a b$

we need to find a and b such that their product is q and their sum is p.

Therefore, the factoring process here is that if:

$$x^2 + p x + q = (x + a) (x + b)$$

Then, $p = a + b$ and $q = a b$

5- Factoring a Quadratic form:

$m x^2 + px + q$, where p , q and m are nonzero constants and $m \neq 1$ or $m \neq -1$.

Using the fact that:

$$m x^2 + p x + q = (x + a) (x + b)$$

if $p = a + b$ and $q = a b$

وأخيــراً فــإن عرض الطرق أعلاه لعملية التحليل من خلال الأمثلة الوافية لأغلب الحالات المرادفة سيتم كالآتي:

مثال 31

حل إلى العوامل Factor the following:

a) $2x^2 - 9x + 4 = (2x - 1)(x - 4)$

b) $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$

c) $3x^2 + 4x - 4 = (3x - 2)(x + 2)$

جميع الأشكال أعلاه مشابهة للشكل التربيعي $m x^2 + p x + q$ وبالتالي تم التركيز في عملية التحليل هنا في محاول إيجاد الحدان اللذان حاصل ضربهما هو mq وحاصل جمعهما هو p.

في الفرع (a) الحدان هما 8− و1− بحيث أن حاصل ضربهما 8 ومجموعهما 9−، وفي الفرع (b) الحدان هما 6− و1 بحيث أن حاصل ضربهما 6− ومجموعهما 5−، أما في الفرع (c) فالحدان هما 6 و 2− بحيث أن حاصل ضربهما 12− ومجموعهما 4.

مثال 32

حل إلى العوامل Factor the following:

a) $2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2)$

$= 2(x + 2)(x + 1)$

نلاحظ هنا أن الحد المشترك هو 2 وعند استخراجه يتبقى لدينا شكل تربيعي يمكن إيجاد عوامله كما في الأمثلة السابقة.

b) $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4)$

$= 2(x - 2)(x - 2)$

$= 2(x - 2)^2$

كذلك نلاحظ هنا بان الحد المشترك هو 2 وعند استخراجه يتبقى لدينا شكل تربيعي ثم نقوم بتحليله.

c) $4x^2y - 12xy - 16y = 4y(x^2 - 3x - 4)$

$$= 4y(x+1)(x-4)$$

هـــنا الحـــد المشـــترك لجميع الحدود هو 4y وباستخراجه يتبقى لدينا شكل تربيعي للمتغير x نقوم بتحليله كما في السابق.

d) $x^2y^2 - y^2 - x^2 + 1 = (x^2y^2 - y^2) - (x^2 - 1)$

يلاحـــظ هنا بأن الحد المشترك بين x^2y^2 و y^2 هو y^2 وعند استخراجه يتبقى لدينا:

$$x^2y^2 - y^2 - x^2 + 1 = y^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1)$$

فـــي هـــذه المـــرحلة نلاحظ بأن الحد المشترك هو $(x^2\text{-}1)$ وعند استخراجه نحصل على:

$$x^2y^2 - y^2 - x^2 + 1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

وأخيراً وعند استخدام قانون الفرق بين مربعين نحصل على:

$$x^2y^2 - y^2 - x^2 + 1 = (x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$$

مثال 33

حل إلى العوامل Factor the following:

a) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

b) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

c) $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3$

$$= (2x - 3y)[(2x)^2 + (2x)(3y) + (3y)^2]$$

$$= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$$

وتـــم التحلـــيل فـــي هذا المثال باستخدام علاقة جمع مكعبين أو الفرق بين مكعبين.

59) $\dfrac{\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}}{\frac{1}{2y}-\frac{1}{3y}}$

60) $(\frac{xy}{5})\div(\frac{1}{3}\div\frac{x}{y}-\frac{3x}{2})$

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following للأسئلة (61-74):

61) $(2^3)^5+(2^5)^2$

62) $(2^3)^5\,.\,(2^5)^2$

63) $(x^3)^4+(x^{-3})^4$

64) $(x^3)^4\,.\,(x^{-3})^4$

65) $(xy^{-3})^{-1}$

66) $(xy^2z^2)^{-1}\,(xyz)^3$

67) $\dfrac{(2^4)^3}{4^3}$

68) $\dfrac{(3^3)^2}{3^4}$

69) $\dfrac{y^{-2}}{y^{-7}}$

70) $\dfrac{(-y^{-2})^{-3}}{(-y^{-1})^{-2}}$

71) $x^3\,(x^{-2}-x)$

72) $3x^2\,(x^3+2x^{-2})$

73) $(2x)^{-1}+(2y)^{-1}$

74) $\dfrac{3y}{11x^3}+\dfrac{2}{5xy}$

بسط المقادير التالية Simplify the following expressions للأسئلة (75-94):

75) $(x+y+3)+(4x-2y-5)$

76) $(x^2+xy-2)-(x^2-4\,xy)$

77) $(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})+(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})$

78) $(x+4)\,(x-5)$

79) $(2x+1)\,(x+2)$

80) $(5x-1)\,(2y+1)$

81) $(y^2+4)\,(y^2-3)$

82) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

83) $(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})$

84) $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})$

85) $(y^2+2\,y-41)\,(y+3\,y^2+1)$

86) $(x^2+\frac{1}{x})(x^2-x^3+3)$

87) $(2xy - \frac{x}{y})(4xy^2 + \frac{y}{x})$

88) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2$

89) $(2x - 3y)^2 - (x + y)^2$

90) $(4x^3 - 3x^2) \div x^2$

91) $(6x^2 + x - 1) \div (3x - 1)$

92) $(x^2 + 1) \div (x + 1)$

93) $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 4)$

94) $(3x^2 - 3x - 6) \div (x - 2)$

حلل إلى العوامل Factor the following للأسئلة (95-108):

95) $15x^2 + 3x$

96) $2x^2y + 6x$

97) $x + x^2 + x^3 + x^4$

98) $x(y + 1) - y(y + 1)$

99) $x^2 - 9$

100) $x^2y^2 - 9$

101) $5x^4 - 20y^4$

102) $x^2 - 3x - 6$

103) $x^2 - 5x + 6$

104) $x^2 + 6x + 9$

105) $x^2 + x - 12$

106) $2x^2 - 8x + 8$

107) $6x^2 - x - 12$

108) $x^3 - 8y^3$

وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثاني

2

معادلات بمتغير واحد

ومنشآتها

ارية والاقتصادية

الفصل الثاني
معادلات بمتغير واحد
Equations in One Variable

2-1 مقدمة Introduction:

هـذا الفصل سوف يتناول المعادلات Equations بشكليها المعادلات الخطية Linear Equations والمعـادلات التـربيعية Quadratic Equations لمتغير واحد One Variable ولـيكن X أو Y. وكـذلك سـوف يتناول هذا الفصل أيضاً بعض المفاهـيم Concepts والعلاقـات أو الصيغ Rules الخاصة بالتعامل مع مثل هذه المعـادلات. وكذلك سنتعرف على كيفية حلها Solving the Equations لإيجاد قيم المتغيـر الخاص بها وسيتضمن الفصل أيضاً كثير من الأمثلة المختلفة Examples وكذلك الأمثلة التطبيقية Applied Examples والتي تساعد في الاستفادة من مفهوم المعادلات لحل كثير من المشاكل التطبيقية. وسيحتوي الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

سيتضـمن الفصـل عدة مباحث وهي المبحث 2-2 المعادلة الخطية بمتغير واحـد Linear equation in one variable والمـبحث 2-3 تطبـيقات المعادلات الخطـية Applications of linear equations وأخيـراً المـبحث 2-4 المعادلات التربيعية Quadratic equations.

2-2 المعادلة الخطية Linear Equation:

المعادلة هي صيغة تعبر عن المساواة بين مقدارين جبريين

The equation is a statement that expresses the equality of two algebraic expressions.

بصورة عامة المعادلة تتضمن متغير واحد أو أكثر One variable or more وتحتوي على رمز المساواة (=).

التالي أمثلة عن المعادلات The following are examples on equations:

سنقوم الآن بعرض بعض خصائص المساواة والتي ستكون ذات فائدة كبيرة في حل المعادلات الخطية كالآتي:

Equality properties:

For a , b and c real numbers we have:

1) If $c = b$, then $c + a = b + a$	Addition property
2) If $c = b$, then $c - a = b - a$	Subtraction property
3) If $c = b$, then $a\,c = a\,b$, $a \neq 0$	Multiplication property
4) If $c = b$, then $\frac{c}{a} = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$	Division property

وبالتالـــي فإننا نستطيع أن نجمع (أو نطرح أو نضرب أو نقسم) ثابت أو أي حد جبري لطرفي المعادلة وتبقى المعادلة والنتائج كما هي بشرط عدم الضرب في (أو القسمة على) صفر.

We can add, subtract, multiply or divide any constant or any algebraic expression (non zero) to both sides of an equation.

الحالات التالية لتوضيح تلك الخصائص أعلاه:

for example, let $x - 2 = 3$

بإضـــافة 2 إلى طرفي المعادلة فإن ذلك لا يؤثر على حل المعادلة باستخدام خاصية الإضافة أعلاه

Adding 2 to both sides of this equation will not change the roots of this equation, by the addition principle, and we have:

$x - 2 + 2 = 3 + 2$

$x = 5$

وهــذا يعني أن $x = 5$ هو حل المعادلة وهو الحل الوحيد Unique solution لهذه المعادلة.

As another example, let $3x = 9$

وبتقسيم طرفي المعادلة على المعامل 3 فإن ذلك لا يؤثر على نتائج المعادلة، حيث أننا لم نقسم على صفر باستخدام خاصية القسمة

Dividing both sides of this equation by 3 will not change the roots of this equation, by the division property, and we have

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

وهذا هو حل المعادلة الوحيد.

ونستطيع تطبيق جميع الخصائص السابق ذكرها بنفس الأسلوب.

أما عن تعريف المعادلة الخطية من الدرجة الأولى فلدينا:

Definition:

An equation is a first degree or a linear equation in one variable X if it can be transformed into equation where the left side is of the form ax + b, $a \neq 0$ and the right side is equal to zero, where a and b are real constants.

And this form is called the standard form of a linear equation.

وذلك يعني أن المعادلة الخطية بمتغير واحد هي المعادلة ذات الشكل العام $ax + b = 0$ ، حيث أن b , a هما ثوابت حقيقية.

for example: $4x + 8 = 0$ is a linear equation in one variable and subtracting 8 from both sides gives

$$4x = -8$$

Then, dividing both sides by 4 we get

$$x = -2$$

This is the only solution for the equation.

As another example we notice that $x - 100 = 0$ is also a linear equation in one variable.

Adding 100 to both sides fives $x = 100$ and this is the only solution for the equation.

فـــي البداية نحتاج لضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك للمقامات وهو DM لنحصل على:

$$M (y - 2x) = 3 D (y - r)$$

$$My - 2 M x = 3 Dy = 3 D r$$

لحـــل الفـــرع (a) من المثال نعتبر جميع الحروف ثوابت باستثناء y فيعامل كمتغير:

$$M y - 3 D y = -3 D r + 2 M r$$

$$y (M - 3 D) = 2 M r - 3 D r$$

$$y = \frac{2Mr - 3Dr}{M - 3D}$$

وهذا هو حل المعادلة للمتغير y.

أمـــا لحـــل الفـــرع (b) من المثال فنعتبر جميع الحروف ثوابت باستثناء x فيعامل كمتغير:

$$- 2 M x = 3 D y - 3 D r - M y$$

$$x = \frac{3Dy - 3Dr - My}{-2M}$$

وهذا هو حل المعادلة للمتغير x.

مثال 4

حل المعادلة لإيجاد قيمة x :Solve for x

$$M = \frac{y}{1 - x}$$

بضرب طرفي المعادلة بالحد $\frac{1-x}{M}$ نحصل على:

$$1 - x = \frac{y}{M}$$

$$-x = \frac{y}{M} - 1$$

$$x = 1 - \frac{y}{M}$$

وهذا هو حل المعادلة.

2-3 تطبيقات المعادلات الخطية Application of Linear Equations:

يمكـن الاسـتفادة مـن مفهوم المعادلة الخطية لوصف كثير من التطبيقات ويمكـن الاستعانة بطرق حلها لحل كثير من المشاكل التطبيقية وفي جميع الحقول العملية.

We can apply the linear equations in many applied problems by using the algebraic methods.

والأمثلة التي سيتم عرضها في هذا المبحث لتوضيح التطبيق حيث أن بعض مـن هـذه الأمثلة لتوضيح عملية تحويل المشكلة من صيغتها الكلامية إلى صيغة المعـادلات الخطـية والبعض الآخر يظهر هذا الجانب إضافة إلى كيفية حل تلك المشاكل.

The following examples illustrate how to translate the verbal forms into algebraic terms, some of these examples are with their solutions.

مثال 5

إذا كان أحمد يحصل على x من مئات الدولارات في الشهر. ويحصل أخيه علـى 600 دولار أكثر من ضعف ما يحصل عليه أحمد. فما هو عدد الدولارات التي يحصل عليها كل منهما.

If Ahmed earns x hundred dollars per month and his brother is 6 hundred dollars more than twice Ahmed's earn. How many dollars each of them earns in the end of the month.

لكـتابة هـذا المثال بالصيغة الرياضية، نفرض أن أحمد يحصل على x من مئات الدولارات. فإن أخوه سيحصل على (2x + 6) من مئات الدولارات.

If Ahmed earns x hundred dollars. Then, his brother earns (2x + 6) hundred dollars.

مثال 6

علي أكبر من أخيه بعشر سنوات. وقبل عشر سنوات كان عمر علي ضعف عمر أخيه. ما هو عمر علي وعمر أخيه الآن وقبل عشر سنوات.

Ali is 10 years older than his brother. Ten years ago Ali was as twice as his brothers age. How old is Ali and his brother now and ten years ago.

لإيجاد عمر علي وعمر أخيه الآن وأيضاً عمرهما قبل عشر سنوات نفرض أن x يمثل عمر علي الآن. وأن عمر أخيه هو (x-10).

وقبل عشر سنوات كان عمر علي أقل بعشر سنوات مما هو الآن ولهذا فإن عمـــر علـــي قبل عشر سنوات كان (x-10). وكذلك فإن عمر أخيه كان أقل بعشر سنوات مما هو عليه الآن ولهذا فإن عمر أخيه قبل عشر سنوات كان

$(x - 20) = (x - 10 - 10)$

وبما أن عمر علي كان ضعف twice عمر أخيه قبل عشر سنوات فإن:

$x - 10 = 2\,(x - 20)$

ولإيجاد عمر علي علينا إيجاد قيمة x كحل للمعادلة الأخيرة كالتالي:

We slove for x to get:

$$x - 10 = 2\,x - 40$$

$$x - 2\,x = -40 + 10$$

$$-x = -30$$

$$x = 30$$

أي أن عمـــر علـــي الآن هو 30 سنة وعمر أخيه هو 20 سنة. وقبل عشر سنوات كان عمر علي هو 20 سنة وعمر أخيه هو 10 سنوات.

مثال 7

الراتب الشهري إلى عمر هو 1600 دولار بالإضافة إلى عمولة بيع مقدارها 20%. وكان عمر يبيع بمعدل 80 دولار في الساعة. ما هو عدد الساعات التي يجب أن يعملها عمر ليحصل على مبلغ 3600 دولار شهرياً.

Omar earns salary of $1600 per month plus a commission of 20% on the sales he makes. Omar find that on the average, he takes one hour to make $80 worth of sales. How many hours must Omar work on the average each month to earn $3600.

لكتابة المعلومات في هذا المثال بالصيغة الجبرية علينا أن نفرض أن عمر يعمل x من الساعات لكل شهر.

وكان يبيع بمبلغ 80 دولار في الساعة الواحدة بعمولة بيع 20%، لذلك فإن معدل عمولته في الساعة الواحدة هو:

$$(80)\,(20\%) = 16$$

وذلك يعني أن العمولة التي يحققها عندما يعمل x من الساعات هي $16x$ وبالتالي فإن عدد الساعات التي على عمر أن يعملها ليحقق ربحاً مقداره 3600 دولار هو حل المعادلة التالية:

$$1600 + 16x = 3600$$

وباتباع الخطوات اللازمة لحل هذه المعادلة نجد ما يلي:

$$16x = 3600 - 1600$$

$$16x = 2000$$

$$x = 125$$

ويعني ذلك أن على عمر أن يعمل 125 ساعة شهرياً ليحقق مبلغ 3600 دولار.

مثال 8

تاجـــر سيارات اشترى 800 سيارة بسعر 700 دولار للسيارة الواحدة. باع مـــنها 300 سيارة بربح 20%. ما هو السعر الذي يجب عليه أن يبيع به الـــ500 سيارة الباقية ليحقق ربحاً بمعدل 28% ولجميع السيارات.

A car dealer bought 800 cars for $700 each. He sold 300 car of them at profit of 20%. At what price must he sell the remaining 500 cars if his average profit on the whole sales transaction is to be 28%.

عليـــنا في البداية تحويل الصيغة الكلامية إلى الصيغة الجبرية بافتراض ما يلي:

كل سيارة باعها التاجر حقق فيها ربحاً مقداره 20% من سعر شراءها وهو 700$ وبالتالي فإن ربح كل سيارة باعها هو:

$$(20\%)\ (700) = 140 \text{ dollars}$$

ولهذا فإن الربح من بيع 300 سيارة هو:

$$(140)\ (300) = 42000 \text{ dollars}$$

وبافتراض أن سعر بيع الـــ500 سيارة الباقية هو x دولار. فإن ربح التاجر لكـــل ســـيارة ســـيكون (x-700) والذي يمثل الفرق بين سعر البيع وسعر الشراء. وبالتالي فإن ربحه لجميع السيارات سيكون:

$$500\ (x - 700) \text{ dollars}$$

وأخيراً فإن مجموع الربح لجميع السيارات (800 سيارة) هو ربح بيع 300 سيارة وهو 4200$ مضافاً إليه ربح بيع 500 سيارة وهو (x−700) 500$ أي أن مجموع الربح هو:

$$42000 + 500\ (x - 700) \text{ dollars}$$

وبمـــا أن الربح يجب أن يكون 28% من سعر الشراء لجميع السيارات الـــ 800. فإن هذا الربح سيساوي:

$$\frac{28}{100}(700)(800) = 156800 \text{ dollars}$$

وبالتالـــي فلتحديد سعر بيع السيارات المتبقية لتحقيق الربح المطلوب هو حل المعادلة التالية:

$$42000 + 500\,(x - 700) = 156800$$

وباتباع الخطوات العامة لحل المعادلة الخطية بمتغير واحد لدينا:

$$42000 + 500\,x - 350000 = 156800$$

$$500\,x = 156800 - 42000 + 350000$$

$$500\,x = 464800$$

$$x = 929.6$$

ويعنـــي ذلـــك أن سعر البيع هو 929.6$ لكل سيارة من السيارات الـــ500 الباقية.

مثال 9

يملـــك علـــي 50000$ معدة للاستثمار. علي يرغب أن يحصل سنوياً على 4000$ من هذا المبلغ. هو يستطيع أن يستثمر بنسبة 7% مع أصدقائه أو يستثمر مـــع شركة والتي هي أكثر خطورة بنسبة 10%. كيف يقسم علي المبلغ للاستثمار على النسب ليحقق الربح 4000$ سنوياً وفي نفس الوقت يقلل الخسارة إلى أقل ما يمكن.

Ali has $50000 to invest. He wants to receive an annual income of $4000. He can invest his funds at 7% with friends bonds or with a greater risk company in 10% bonds. How should Ali invest his money in order to earn $4000 and in the same time to minimize his risk.

لنفرض أن X يمثل المبلغ من الدولارات التي استثمرت مع أصدقائه.

لذلك فإن المبلغ الذي استثمر مع الشركة الأكثر خطورة هو (50000-x) وأن المبلغ الذي سوف يستلمه علي من العمل مع الأصدقاء هو $(\frac{7}{100})(x)$ أما المبلغ الذي سوف يستلمه من العمل مع الشركة الأكثر خطورة فهو

$$(\frac{10}{100})(50000-x)$$

وبالتالي فإن مجموع المبلغ الذي سوف يستلمه علي من الاستثمار مع المصدرين فهو:

$$(\frac{7}{100})(x)+\frac{10}{100}(50000-x)$$

والذي يجب أن يكون 4000$.

وبالتالي فإن المبلغ الذي يجب عليه استثماره هو إيجاد قيمة x والتي تحقق المعادلة الخطية بمتغير واحد التالية:

$$(\frac{7}{100})(x)+\frac{10}{100}(50000-x)=4000$$

وباتباع الخطوات اللازمة لحل هذه المعادلة لدينا:

$$7x + 10\,(50000 - x) = 400000$$

$$7x + 500000 - 10x = 400000$$

$$7x - 10x = 400000 - 500000$$

$$-3x = -100000$$

$$x = 33333.333$$

ويعني ذلك أن على علي أن يستثمر مع أصدقائه المبلغ 33333.333$ وأن يستثمر مع الشركة الأكثر خطورة المبلغ 16666.6667$ ليحقق الدخل 4000$ من استثمار هذا المبلغ.

وفـــي حالـــة الرغبة في زيادة الدخل يجب أن يزيد من المبلغ المستثمر مع الشركة الأكثر خطورة.

2.4 المعادلات التربيعية Quadratic Equations:

المعادلـــة التربيعية لمتغير واحد Quadratic equation in one variable هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصيغة العامة التالية:

General form of a quadratic equation in one variable is:

$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0)$

a and b are real constants

وتدعي هذه الصيغة للمعادلة التربيعية بالصيغة القياسية Standard form.

وهناك طرق عديدة لحل المعادلات التربيعية وسوف نتناول أربع طرق منها كالآتي:

There are four methods for solving the quadratic equation that will be presented in this section as follows:

1- Solution by square root.

الحل بواسطة الجذر التربيعي.

2- Solution by factoring.

الحل بطريقة التجزئة إلى العوامل.

3- Solution by quadratic formula.

الحل بطريقة المميز.

4- Solution by completing the square.

الحل بطريقة إكمال المربع.

ولاســـتخدام أيـــاً مـــن هذه الطرق يجب أن نحول المعادلة التربيعية بجميع أشـــكالها وحدودها إلى الصيغة القياسية العامة $ax^2 + bx + c = 0$ ومن ثم استخدام إحـــدى الطرق أعلاه لإيجاد الحل، أي إيجاد ما يسمى بجذور المعادلة roots والتي تمثل الحل العام للمعادلة التربيعية General solution أو ببساطة الحل Solution.

وسيتم في هذا المبحث شرح وتعريف وتحديد خطوات كل واحدة من الطرق أعلاه مع الأمثلة الخاصة بكل حالة من الحالات ضمن الفقرات التالية:

1-4-2 الحل بطريقة الجذر التربيعي Solution by square root:

وبالرجوع لمعنى الجذر التربيعي يمكن الاستعانة بذلك لإيجاد حل المعادلات التربيعية والمثال التالي سيوضح ذلك:

The following example illustrate the square root method

2

مثال 10

حل المعادلات التالية باستخدام طريقة الجذر التربيعي

Solve the following quadratic equation using the square root method

a) $x^2 - 13 = 0$

وبإضافة 13 لطرفي المعادل نحصل على:

$x^2 = 13$

والآن ما هو العدد الحقيقي والذي تربيعه يساوي 13 لذلك فإن:

$x = \mp\sqrt{13}$

ويعني ذلك أن حل المعادلة التربيعية هو $+\sqrt{13}$ أو $-\sqrt{13}$

ويمكن كتابة هذا الحل بشكل ما يمثل مجموعة الحل set of general solution كما يلي:

$S = \{+\sqrt{13}\ ,\ -\sqrt{13}\}$

b) $2x^2 - 6 = 0$

وبإضافة 6 لطرفي المعادلة نحصل على:

$2x^2 = 6$

وبالقسمة على 2 نحصل على:

$x^2 = 3$

والآن ما هو العدد الحقيقي والذي تربيعه يساوي 3 لذلك فإن:

$$x = \mp\sqrt{3}$$

ويعني ذلك أن حل المعادلة التربيعية هو $+\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}$

ويمكن كتابة مجموعة الحل بالشكل:

$$S = \{+\sqrt{3} \ , \ -\sqrt{3}\}$$

c) $3x^2 + 12 = 0$

وبطرح 12 من طرفي المعادلة نحصل على:

$$3x^2 = -12$$

وبالقسمة على 3 نحصل على:

$$x^2 = -4$$

والآن ما هو العدد الحقيقي والذي تربيعه يساوي 4-، وبما أنه لا يوجد مثل هذا العدد لذلك لا يوجد حل حقيقي للمعادلة التربيعية هنا وعندئذٍ

There is no real solution.

2-4-2 الحل بطريقة التجزئة إلى العوامل **Solution by factoring**:

إذا كـان الطـرف الأيسر للمعادلة التربيعية يمكن تجزئته أو تحليله عندئذٍ نستطيع حل المعادلة بهذه الطريقة

If the left side of a quadratic equation when written in standard form can be factored, then the equation can be solved very quickly.

وطـريقة الحـل بالتجزئة أو التحليل تعتمد على خاصية التحليل، والتي تم شرحها سابقاً وبالشكل التالي:

The method of solution by factoring depend on the following property of real numbers:

If A and B are real numbers. Then, AB = 0 if and only if A = 0 or B = 0, or both are zero.

وهــذا يعنــي إذا كان A و B عددان حقيقيان فإن حاصل ضربهما يساوي صفراً إذا وفقط إذا كان أي منهما أو كلاهما صفراً.

والمــثال التالــي سيوضح خصائص التحليل السابق ذكرها وحل المعادلات التــربيعية باستخدام طريقة التحليل لتحديد قيم المتغيرات فيها مستخدمين الخاصية أعلاه.

مثال 11

حل المعادلات التربيعية التالية باستخدام طريقة التحليل إن أمكن

Solve the following quadratic equations by factoring, if possible:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

وبالرجوع لعمليات التحليل السابقة لدينا:

$(x + 2)(x + 1) = 0$

ولذلك فإن:

$x + 2 = 0 \quad$ or $\quad x + 1 = 0$

وبالتالي فإن الحل هو:

$x = -2 \quad$ or $\quad x = -1$

ويعني هذا أن الحل العام للمعادلة التربيعية هو المجموعة التالية:

$S = \{-2 , -1\}$

b) $3x^2 - 6x - 24 = 0$

وبقسمة جميع حدود المعادلة على 3 نحصل على:

$x^2 - 2x - 8 = 0$

وباستخدام التحليل إلى العوامل لدينا:

$(x + 2)(x - 4) = 0$

ولذلك فإن:

$x + 2 = 0 \quad$ or $\quad x - 4 = 0$

وبالتالي فإن الحل هو:

$x = -2 \quad$ or $\quad x = 4$

ويعني هذا أن الحل العام للمعادلة التربيعية هو المجموعة التالية:

$S = \{-2 , 4\}$

c) $x^2 - 25 = 0$

وباستخدام الفرق بين مربعين نحلل المعادلة أعلاه لنحصل على:

$(x - 5)(x + 5) = 0$

ولذلك فإن:

$x - 5 = 0$ or $x + 5 = 0$

وبالتالي فإن الحل هو:

$x = 5$ or $x = -5$

ويعني هذا أن الحل العام للمعادلة التربيعية هو المجموعة التالية:

$S = \{-5 , 5\}$

ويجدر القول هنا بأن هذه المعادلة التربيعية $x^2 - 25 = 0$ يمكن حلها بالطريقة الأولى طريقة الجذر التربيعي كالتالي $x^2 = 25$ وبالتالي فإن $x = \mp 5$.

وبهذا نقول بأنه يمكن حل معادلة تربيعية معينة بأكثر من طريقة من طرق حل المعادلات التربيعية.

We can solve a quadratic equation by one or more of the solving methods.

d) $6y^2 = 4y$

وبطرح 4y من طرفي المعادلة نحصل على:

$6y_2 - 4y = 0$

وباستخراج y كعامل مشترك نحصل على:

$y(6y - 4) = 0$

ولذلك فإن:

$6y - 4 = 0$ or $y = 0$

وبالتالي فإن الحل هو:

$6y = 4$ or $y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ويعني هذا أن حل المعادلة التربيعية هو المجموعة:

$S = \{0 , \frac{2}{3}\}$

e) $6x^2 + 7x + 1 = 0$

وباعتماد طريقة التحليل نحصل على:

$$(6x + 1)(x + 1) = 0$$

ولذلك فإن:

$$6x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$$

وبالتالي فإن الحل هو:

$$6x = -1 \quad \text{or} \quad x = -1$$

$$x = \frac{-1}{6}$$

ويعني هذا أن حل المعادل التربيعية هو المجموعة:

$$S = \{-1 , -\frac{1}{6}\}$$

2-4-3 الحل بطريقة المميز (الصيغة التربيعية):

Solution by Quadratic formula

طـــريقة المميز أو طريقة الصيغة التربيعية تعتبر من أكثر الطرق استخداماً وذلـــك لكـــونها طـــريقة يمكن بواسطتها حل جميع أنواع المعادلات التربيعية (من الدرجـــة الثانـــية)، حيث أنها تعتبر الطريقة الأنسب عندما تعجز الطرق الأخرى للوصول إلى الحل.

وبالرجوع إلى الصيغة العامة للمعادلات التربيعية وبالشكل:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0)$$

فـــإن تطبـــيق الصـــيغة التربيعية quadratic formula أو ما يسمى بطريقة المميز يكون كالآتي:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويمكـــن أن يكون لدينا تصور عن حل المعادلات من خلال ملاحظة المقدار $b^2 - 4ac$ فـــإن كانت قيمة هذا المقدار موجبة دل ذلك على أن هناك حلين حقيقيين

للمعادلـــة التـــربيعية، وإذا كانت نتيجة هذا المقدار zero فيدل ذلك على وجود حل حقيقي واحد فقط للمعادلة التربيعية، أما إذا كانت نتيجة هذا المقدار سالبة فهذا يعني عدم وجود حل حقيقي للمعادلة التربيعية أو للمتغير.

والأمثلة التطبيقية التالية هي حالات مختلفة لحل المعادلات التربيعية بطريقة الصيغة التربيعية.

مثال 12

حل المعادلة التربيعية التالية باستخدام طريقة الصيغة التربيعية

Solve the following quadratic equation using the quadratic formula

$x^2 - 2x - 1 = 0$

بمقارنـــة بشـــكل المعادلة التربيعية أعلاه مع الشكل العام للمعادلة التربيعية نلاحظ أن:

$a = 1$, $b = 2$, and $c = -1$

وبالتالي فإن:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \mp \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \mp \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \mp \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \mp 2\sqrt{2}}{2} = 1 \mp \sqrt{2}$$

ويعني هذا وجود حلين للمعادلة التربيعية هما $1-\sqrt{2}$ or $1+\sqrt{2}$

وللتأكد من الحل نعوض في المعادلة الأصلية عن x كالآتي:

$x^2 - 2x - 1 = 0$ when $x = 1 + \sqrt{2}$ we have

$$(1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) - 1 = 0$$

$$\not{1} + 2\not{\sqrt{2}} + \not{2} - \not{2} - 2\not{\sqrt{2}} - \not{1} = 0$$

$$0 = 0$$

وهذا يعني أن الحل صحيح.

also, $x^2 - 2x - 1 = 0$ when $x = 1 - \sqrt{2}$ we have

$$(1-\sqrt{2})^2 - 2(1-\sqrt{2}) - 1 = 0$$

$$1 - 2\sqrt{2} + 2 - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

وهذا يعني أن الحل صحيح.

مثال 13

حل المعادلة التربيعية التالية باستخدام الصيغة التربيعية

Solve the following quadratic equation using the quadratic formula

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

وبمقارنة هذه الدالة التربيعية بالشكل العام للدالة التربيعية نجد أن:

$a = 1$, $b = -4$, and $c = 4$

وبالتعويض في الصيغة التربيعية نجد أن:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \mp \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \mp \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \mp \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ويعني هذا أن حل المعادلة التربيعية هو حل واحد حقيقي وهو أن $x = 2$ والسبب في ذلك أن قيمة $b^2 - 4\,ac$ تساوي صفراً.

وللتأكد من الحل نعوض في المعادلة التربيعية الأصلية عن قيمة x بـ2 لنحصل على:

$$x^2 - 4\,x + 4 = 0$$

$$2^2 + 4\,(2) + 4 = 0$$

$$4 - 8 + 4 = 0$$

$$0 = 0$$

مثال 14

حل المعادلة التربيعية التالية باستخدام الصيغة التربيعية

Solve the following quadratic equation using the quadratic formula

$3x^2 - 5x + 6 = 0$

وبمقارنة هذه المعادلة التربيعية بالشكل العام نجد أن:

$a = 3 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad \text{and} \quad c = 6$

وبالتعويض في الصيغة التربيعية نجد أن:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \mp \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(6)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{5 \mp \sqrt{25 - 72}}{12} = \frac{5 \mp \sqrt{-47}}{12}$$

لا يوجد حل حقيقي لهذه المعادلة التربيعية وذلك لكون المقدار داخل الجذر سالب.

2-4-4 طريقة إكمال المربع Completing the Square Method:

تعتبر طريقة إكمال المربع من الطرق المهمة لحل المعادلات التربيعية وذلك لكونها أيضاً تستخدم لمعظم المعادلات التربيعية. وتستند هذه الطريقة على تحويل الشكل العام للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ إلى معادلة طرفها الأيسر على شكل مربع كامل، أما طرفها الأيمن فيحتوي على الثابت المتبقي من المعادلة لتصبح بالشكل $(X + A)^2 = B$

This method is based on the process of arranging the equation of the standard form $ax^2 + bx + c = 0$ into the form $(X + A)^2 = B$, where A and B are real constants.

وبعدئـــذٍ نقـــوم بحل المعادلة بعد أخذ الجذر لطرفي المعادلة وإكمال عملية التبسيط لإيجاد قيم المتغير إن كانت له قيم حقيقية.

The equation can be solved by taking the square root of both sides of the equation, if it has a real solution.

والأمثلة التالية تطبيقات لهذه الطريقة كالآتي:

مثال 15

حل المعادلة التربيعية التالية باستخدام طريقة إكمال المربع

Solve the following quadratic equation using completing the square method

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

بإضافة الثابت 1 لطرفي المعادلة نحصل على:

$$x^2 - 2x = 1$$

نحـــاول إيجـــاد العـــدد الحقيقي الذي يمكن إضافته لطرفي المعادلة ويجعل الطرف الأيسر مربعاً كاملاً.

والقاعدة (Rule):

أ- عـــندما يكون معامل x^2 هو 1 نقوم بقسمة معامل x على 2 ثم نربع ذلك المقدار.

ب- أمـــا عـــندما يكون معامل x^2 لا يساوي 1 فنقسم جميع أطراف المعادلة علـــى هذا المعامل ليصبح المعامل الجديد لـــx^2 هو 1. ثم نقوم بتطبيق الفقرة (أ) أعلاه.

وبالرجوع للمعادلة في هذا المثال لدينا:

$$x^2 - 2x = 1$$

أي أن معامل x^2 يساوي 1 وأن معامل x هو 2− ولذلك فإننا سنقوم بإضافة الحد $(\frac{-2}{2})^2 = (-1)^2 = 1$ ونحصل على:

$$x^2 - 2x + 1 = 1 + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2$$

وباستخدام المربع الكامل نحصل على:

$$(x - 1)^2 = 2$$

وبأخذ الجذر لطرفي المعادلة نحصل على:

$$x - 1 = \mp\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن:

$$x - 1 = \sqrt{2} \quad \text{or} \quad x - 1 = -\sqrt{2}$$

أي أن:

$$x = 1 + \sqrt{2} \quad \text{or} \quad x = 1 - \sqrt{2}$$

ويعني ذلك وجود حلين للمعادلة التربيعية هما $1+\sqrt{2}$ or $1-\sqrt{2}$

مثال 16

حل المعادلة التربيعية التالية باستخدام طريقة إكمال المربع

Solve the following quadratic equation using the completing square method

$$2x^2 - 8x + 3 = 0$$

بطرق الثابت 3 من طرفي المعادلة نحصل على:

$$2x^2 - 8 = -3$$

وبقسمة طرفي المعادلة على 2 نحصل على:

$$x^2 - 4x = \frac{-3}{2}$$

نضيف الثابت لإكمال المربع وباتباع القاعدة السابقة بالشكل

$$(\frac{-4}{2})^2 = (-2)^2 = 4$$

إلى طرفي المعادلة لنحصل على:

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{-3}{2} + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{5}{2}$$

وبإكمال المربع نحصل على:

$$(x-2)^2 = \frac{5}{2}$$

أي أن:

$$x - 2 = \mp\sqrt{\frac{5}{2}}$$

وبالتالي فإن:

$$x - 2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{or} \quad x - 2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

أي أن:

$$x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{or} \quad x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

ويعني هذا أن هناك حلين حقيقيين للمعادلة التربيعية هما:

$$x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{or} \quad x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

ويمكن تلخيص الخطوات الواجب اتباعها لحل المعادلات التربيعية بطريقة إكمال المربع كالآتي:

The following are the steps to solve the quadratic equation by completing the square method

1- الخطوة الأولى: نضيف ثابت لطرفي المعادلة لحذف الثابت الموجود في طرفها الأيسر

Add constant to both sides of the equation to remove the constant term from the left side.

2- الخطوة الثانية: نقسم على معامل x^2 إذا كان المعامل لا يساوي واحد لجعله واحد

Divide by the coefficient of x^2 if it is not equal to one.

3- الخطـوة الثالـثة: لإكمال المربع للطرف الأيسر للمعادلة يجب إضافة ثابت نحصل عليه من قسمة معامل x على 2 ثم نربع المقدار

To complete the square in equation, add the square of one – half the coefficient of x to both sides.

4- الخطـوة الـرابعة: بعد أن يصبح الطرف الأيسر للمعادلة مربعاً كاملاً نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة ثم نقوم بتبسيط الناتج لإيجاد الحل أو الحلول للمعادلة التربيعية

Now the left side is a complete square, take the square root to both sides and complete the solution.

أسئلة الفصل الثاني
Exercises for chapter two

حل المعادلات التالية للأسئلة (1-11):

Solve the following equations

1) $1 + Y = 5 - Y$

2) $2Y - 5 = -3Y - 15$

3) $4Y - 5(1 - 3Y) = 1 - 3(1 - 4Y)$

4) $3x - 2 + 4(1 - x) = 5(1 - 2x) - 12$

5) $6[2x + 1 - 2(2x - 1)] + 4 = 4[1 + 2(3 - x)]$

6) $\frac{3Y-7}{2} = \frac{Y+1}{3}$

7) $1 - \frac{2x-3}{4} = \frac{2-5x}{3} - 3x$

8) $\frac{1}{3}(2x+1) + \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}(1-2x) - 4$

9) $\frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$; (a) for c , (b) for z

10) $\frac{2}{z} + \frac{3}{zt} = 1$; (a) for z , (b) for t

11) $z = \frac{x-ty}{1-t}$; (a) for t , (b) for y

حل التطبيقات التالية للأسئلة (12-14):

Solve the following applications

12) قبل خمس سنوات، عمر أحمد كان ضعف عمر علي. أوجد عمر أحمد الآن إذا كان مجموع عمرهما اليوم يساوي (43) سنة.

Five years ago, Ahmed was twice as old as Ali. Find the present age of Ahmed if the sum of their ages today is (43) years.

13) استثمر علي مبلغ بنسبة 10% والذي يمثل ضعفين ما استثمره بسبة 7%. مجموع ما حصل عليه عمر لسنة كاملة من الاستثمارين هو 1200$. ما هو المبلغ المستثمر لكل نسبة من النسب؟

Omar invests twice as much at 10% as he invested at 7%. His total annual income from the two investments is 1200$. How much is invested at each rate?

14) استثمر محمد مبلغ 5000$ لنسبة 10% أكثر من نسبة 15%، ومجموع ما حصل عليه لسنة واحدة من الاستثمار هو 1500$. ما هو المبلغ الذي استثمر لكل نسبة من النسب؟

Mohamed invested 5000$ more at 10% than at 15%, and received a total interest income of 1500$ for one year. How much did he invest at each rate?

حل المعادلات التربيعية التالية بأي من الطرق المناسبة للأسئلة (15-39):

Solve the following quadratice equations by any appropriate method

15) $15x^2 = 30(x + 2)$

16) $3x(2x - 6) = -2x + 3$

17) $x^2 = 4(x - 1)(x - 2)$

18) $2x^2 - 6x - 4 = 0$

19) $3x^2 = 12x - 4$

20) $(2x + 3)(x + 1) = (x + 2)(x - 3) + 4$

21) $2x^2 + 12x - 2 = 0$

22) $2x^2 + 4x - 8 = 0$

23) $2x^2 - 6x - 2 = 0$

24) $2x^2 + 10x + 10 = 0$

25) $4x^2 - 8x = 3$

26) $14x + 6(x^2 - 5) = 2x - 6$

27) $2x^2 + 6x + 2 = 0$

28) $4x^2 + 6x - 8 = 0$

29) $2x^2 + 2x - 6 = 0$

30) $2x^2 + 10x + 12 = 0$

31) $6x(x + 2) + 7 = 4$

32) $(x + 1)^2 = 2(x - 1)^2$

33) $x^2 - 5x + 6 = 0$

34) $x^2 - 6x + 9 = 0$

35) $x^2 - 7x + 12 = 0$

36) $x^2 + 4x + 4 = 0$

37) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

38) $(x + 3)(x - 3) = x - 9$

39) $2x^2 + 2x - 3 = 0$

وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثالث

3 المتباينات

الرياضيات وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثالث
المتباينـــــات
Inequalities

3-1 مقدمة Introduction:

تـم فـي الفصـل الأول التعـرف علـى الأعداد الحقيقية Real Numbers وخصائصـها العامـة Their Properties وكـذلك تم التعرف على معنى الأعداد الحقيقـية Meaning of Reals. وفـي الفصـل الثاني تم التعرف على المعادلات الخطـية والتـربيعية لمتغيـر واحد Linear and Quadratic Equations In One Variable وطـرق الحل المناسبة لها Their Solving Methods. وفي هذا الفصل سـيتم التعـرف على مفاهيم رياضية جديدة New Mathematical Concepts لها علاقة وثيقة بتعريف وخصائص ومعنى الأعداد الحقيقية ألا وهي المجموعات Sets والفتـرات Intervals والمتبايـنات الخطـية والتربيعية بمتغير واحد Linear and Quadratic Inequalities In One Variable مـن خـلال التعرف على المتباينات Inequalities ورموزها واستخداماتها وتطبيقاتها الكثيرة. وكذلك سيتم حل كثير من الأمـثلة Examples والأمـثلة التطبيقـية Applied Examples والتي تساعد في الاسـتفادة من مفهوم المتباينات لحل كثير من المشاكل التطبيقية. وسيحتوي الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

سيتضمن الفصل عدة مباحث وهي المبحث 2-3 المجموعات Sets ونظرية المجمـوعات Set Theory والمـبحث 3-3 الفتـرات Intervals والمبحث 4-3 المتبايـنات الخطية بمتغير واحد Linear Inequality In One Variable والمبحث 5-3 المتبايـنات التربيعية بمتغير واحد Quadratic Inequality In One Variable وأخيراً المبحث 6-3 القيم المطلقة Absolute Values.

3-2 المجموعات Sets:

ونظرية المجموعات Set theory:

سـنبدأ الحديث عن المجموعات Sets وطرق التعامل معها How to Deal with Sets والعلاقـات التـي تخصـها Their Relationships بمحاولـة تعريف المجموعة set أولاً كالآتي:

Set: Any well-defined collection of objects, These objects are called members or elements of that set.

These members or elements usually written within this kind of parentheses { } to designate a set using one of these letters A, B, C, D, ... or if the number of sets are very big, then we usually use the letters A_1, A_2, A_3, ... to designate our sets.

Examples of sets:

1) The set of all students in Math. course.
2) The football team in a university.
3) The set of all households in Amman.
4) The set of Integer numbers.

ويلاحـظ مـن الأمـثلة أعـلاه أن المجمـوعة set هي تجمع من مفردات elements يفتـرض أن يكـون لها صفة أو صفات مشتركة، فمجموعة فريق كرة القدم في الجامعة يتألف من عدد من الطلبة في الجامعة واللذين يلعبون ضمن نفس الفـريق، أمـا مجمـوعة الأعداد الصحيحة فهي جميع الأعداد الصحيحة التي تم التعرف إليها سابقاً وهكذا لوصف بقية المجموعات ومماثلاتها.

وحيث أننا سندرس المجموعات ضمن مادة الرياضيات من خلال هذا الكتاب لذلك سيتم التركيز هنا لكتابة والتعامل مع مجموعات الأعداد.

أما عن طرق كتابة المجموعات Methods for writing sets:

1) Listing Method:

if it is possible to specify all elements of a set, then, we can use this method to describe the set by listing all the elements and enclosing the list inside braces.

The general form of listing the elements a_1 , a_2 , a_3, ... , a_n inside the set A, me have:

$$A = \{a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n\}$$

where, a_i , $i = 1 , 2 , 3 , \dots , n$ are called members or elements of the set.

We say that element a_i is a member of (belongs to) the set A, and write $a_i \in A$.

for example, set A consists of the elements 1 , 2 , 3. Then, we write $A = \{1 , 2 , 3\}$, and $1 \in A$, $2 \in A$, and $3 \in A$.

2) Rule Method:

if it is not possible or in which it would be inconvenient to list all members or elements of a particular set. Then, we can use what is called the Rule – Method. In which, we have to specify and state a rule for membership of the elements in the set.

For example to write the set of real numbers between the two numbers a and b. Then, we use

$$A = \{ x \mid a < x < b \text{ , where a and b are reals}\}$$

3) Venn – Diagram:

this method is to present the set by a graph, this graph may be a rectangular or a circle to designate the set and then specify all elements in side this set. Also, this graph maybe the real line and all sets can be presented by the specified points or intervals on this line.

The general form for Venn – Diagram may be:

A [1 * 2 * 3 *] or ——*——*——*——→ R (points 1 2 3)

سنقوم الآن وبعض استعراض طرق عرض المجموعات بالتعامل مع بعض الأمثلة المناسبة لتعريف وكتابة مجموعات الأعداد وكالآتي:

مثال 1

اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية Write the set of Natural Numbers

الأعـــداد الطبيعية وكما تم وصفها سابقاً هي الأعداد ... , 3 , 2 , 1، ويرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز N وستمثل المجموعة التالية:

N = { 1 , 2 , 3 , ... }

مثال 2

اكتب مجموعة الأعداد الصحيحة Write the set of Integer Numbers

الأعـــداد الصحيحة وكما تم وصفها سابقاً هي الأعداد الطبيعية N ومماثلاتها مـــن القـــيم الســـالبة ونقطة الصفر، ويرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز I وستمثل المجموعة التالية:

I = {... , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...}

مثال 3

اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية Write the set of odd Naturals

هذه المجموعة هي جزء Subset من الأعداد الطبيعية السابقة الذكر N والتي لها خاصية أن تكون تلك الفردية منها وبالتالي فإن هذه المجموعة ولتكن A هي:

A = { 1 , 3 , 5 , 7 , ... }

مثال 4

اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية بين العددين 7 , 2

Write the set of Naturals between 2 and 7

لكتابة هذه المجموعة علينا تمييز أربعة حالات مختلفة كالآتي:

a) Both 2 and 7 are included in the set, say A, then:

A = { 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 }

b) Both 2 and 7 are not included in the set, say B, then:

B = { 3 , 4 , 5 , 6 }

c) 2 is included in the set, say C, but 7 is not, then:

$C = \{ 2 , 3 , 4 5 , 6 \}$

d) 7 is included in the set, say D, but 2 is not, then:

$D = \{ 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}$

ويلاحظ من خلال الحالات أعلاه أن هناك فرق واضح في وصف المجموعات من خلال المفردات الداخلة فيها عن طريق وصف تلك المجموعات القائمة Listing the elements.

مثال 5

اكتب مجموعة الأعداد الحقيقية Write the set of Real Numbers

وكما تم وصف الأعداد الحقيقية سابقاً والتي لا يمكن تمييز مفرداتها وبالتالي فإننا لا نستطيع استخدام طريقة القائمة Listing والتي تم اعتمادها للأمثلة السابقة وذلك لصعوبة تحديد جميع العناصر الداخلة ضمن هذه المجموعة. ولذلك يجب علينا استخدام طريقة القاعدة Rule بالشكل التالي:

$R = \{ x \mid -\infty < x < \infty \}$

مثال 6

اكتب مجموعة الأعداد الحقيقية وارسمها بين العددين 2 و 7

Write and graph the set of Reals between 2 and 7

وكما تلام ملاحظته ضمن مثال (4) السابق فإن هناك أربعة حالات مختلفة يمكن تمييزها كالآتي:

a) 2 and 7 are included in the set, say A_1 , then:

$A_1 = \{ x \mid 2 \leq x \leq 7 , x \text{ is real number} \}$

b) 2 and 7 not included in the set, say A_2 , then:

$A_2 = \{ x \mid 2 < x < 7 , x \text{ is real number} \}$

c) 2 is included in the set, say A_3 , but 7 is not, then:

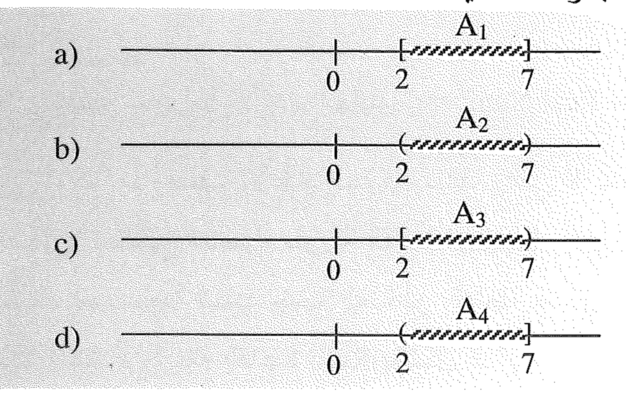
$$A_3 = \{ x \mid 2 \leq x < 7 \text{ , x is real number } \}$$

d) 7 is included in the set, say A_4 , but 2 is not, then:

$$A_4 = \{ x \mid 2 < x \leq 7 \text{ , x is real number } \}$$

وهنا أيضاً يمكن ملاحظة أن الحالات الأربعة أعلاه تعطي مجموعات مختلفة.

أما عن رسم هذه المجموعات فلدينا:



سنقوم الآن بتعريف وتسمية عدد من المجموعات بأسماء محددة وأشكال معينة ورموز معتمدة كالآتي:

Identity Set: A set that contains only one element such as A = {1} , B = {0}, and C = {c}

Empty Set: A set that contains no elements, denoted by ϕ , which is also called the null set. Such as

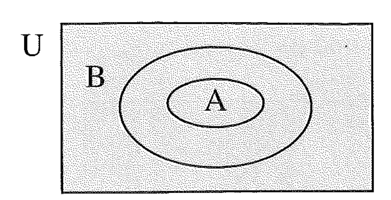
A = { x | x is an integer between 7 and 8}

B = { x | x is a real number and $x^2 = -1$}

Universal Set: A set that contains all subsets and all elements of a given study, denoted by U or S. This set is also called a Sample Space, denoted by Ω.

Subset: A set A is said to be a subset of another set B if every element of A is also an element of B. In such a case, we write $A \subseteq B$.

This relationship can be presented by Venn-diagram as follows:



Note: From the above definitions, we can notice that:

1) Any set A is a subset of the Universal set U

That is , $A \subseteq U$

2) Any set A is a subset of itself.

That is , $A \subseteq A$

3) An empty set ϕ is a subset of any set A.

That is, $\phi \subseteq A$

Therefore, we can say, in general, $\phi \subseteq A \subseteq U$

مثال 7

اكتب المجموعات الجزئية للأعداد 3 , 2 , 1

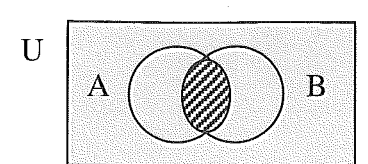
Write all subsets of 1 , 2 , 3

وهنا يمكن القول بأن المجموعات الجزئية subsets والتي يمكن تكوينها من استخدام الأعداد 3 , 2 , 1 هي تبدأ من أصغر مجموعة وهي ϕ
ثم نأخذ الأعداد كلاً على حدة لتكون المجموعات {1}، {2}، {3} ثم نأخذ الأعداد كل اثنين مع بعض لنحصل على المجموعات {2 ، 1}، {3 ، 1}، {3 ، 2}
وأخيراً نأخذ الأعداد الثلاثة مع بعضها لتكون المجموعة الأكبر U = {3 ، 2 ، 1}
وبالتالي فإن المجموعات الجزئية هي:

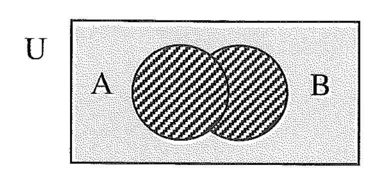
Subsets: ϕ , {1} , {2} , {3} , {1 , 2} , {1 , 3} , {2 , 3} , U

أما عن العلاقات التي يمكن ملاحظتها للمجموعات Relationships on Sets:

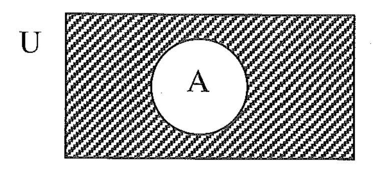
1) Intersection: The intersection of two sets A and B, denoted by $A \cap B$ is the set that contains all elements in A and in B presented as



2) Union: The union of two sets A and B, denoted by $A \cup B$ is the set that contains all elements that are in A or in B or in both presented as:

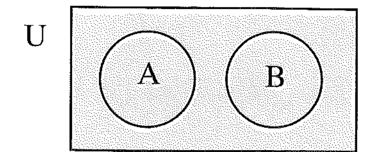


3) Complement: The complement of a set A, denoted by $\overline{A}$ or A^c, is the set of all elements that are in U, but not is A presented as:

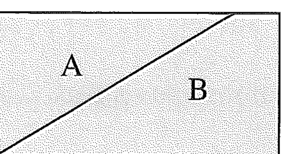


4) Equal: Two sets A and B are said to be equal if $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$. In such a case we write $A = B$.

5) Mutually Exclusive: Two sets A and B are said to be mutually exclusive (or disjoint) if and only if $A \cap B = \phi$ presented as:



or



ويلاحـــظ أن الفــرق بـــين الشكلين أن $U = A \cup B$ للحالة التي في الجهة اليمنى، أما الأخرى فليست كذلك.

باســتخدام العلاقـــات الســابقة التعريف هناك بعض العلاقات التي نستطيع إيجادها أو تحديدها من ذلك وهي كالآتي:

1) $A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$

2) $A \cup B = B \cup A \quad , \quad A \cap B = B \cap A$

وتسمى خاصية التبادل Commutative laws

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

وتسمى خاصية التشارك Associative laws

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

وتسمى خاصية التوزيع Distributive laws

5) $A \cup U = U \quad , \quad A \cup \phi = A$

$A \cap U = A \quad , \quad A \cap \phi = \phi$

وتسمى خاصية الوحدة Identity laws

6) $A \cup A^c = \Omega \quad , \quad A \cap A^c = \phi$

وتسمى خاصية المتممة Complement laws

7) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

وتسمى قوانين دي مورغان Demorgan's laws

أمـــا عـــن بعـــض الأمثلة التي تستخدم الخصائص والتسميات أعلاه فيمكن عرضها كالآتي:

مثال 8

افترض أن U = I وافترض المجموعات الجزئية التالية:

A the set of integers greater than or equal –2 and less than 5.
B the set of integers greater than or equal 0.
N the Natural set.

حدد العلاقات وأوجد المجموعات التي يمكن الحصول عليها من المجموعات أعلاه.

$U = I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

في هذا المثال لدينا المجموعات التالية:

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

ونلاحظ هنا أن $N \subset B$ وهذا يعني $N \cup B = B$ و $N \cap B = N$

وكذلك لدينا ما يلي من العلاقات:

$A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$A \cap N = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup N = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$A \cup B = A \cup N$

$A^c = \{\dots, -4, -3, 5, 6, \dots\}$

$B^c = \{\dots, -3, -2, -1\}$

مثال 9

افترض أن U تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية U = R

وافترض أن:

$A = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$

$B = \{x \mid 1.5 \le x < 3\}$

$C = \{x \mid 1 \le x \le 4\}$

$D = \{x \mid x \geq 4\}$

حدد العلاقات وأوجد المجموعات التي يمكن الحصول عليها من المجموعات أعلاه.

نلاحظ هنا أن $A \subset C$ وهذا يعني أن $A \cup C = C$ و $A \cap C = A$ ونلاحظ أيضاً أن $A \cap D = \phi$ وهذا يعني أن A , D متنافيتان وكذلك لدينا ما يلي من العلاقات:

$A \cap B = \{ x \mid 1.5 \leq x \leq 2 \}$

$A \cup B = \{ x \mid 1 \leq x < 3 \}$

$C \cap D = \{ x \mid x = 4 \} = \{4\}$

$C \cup D = \{ x \mid 1 \leq x < \infty \}$

$A \cup D = \{ x \mid 1 \leq x \leq 2 \} \cup \{ x \mid 1 \geq 4 \}$

$A^c = \{ x \mid -\infty < x < 1 \} \cup \{x \mid 2 < x < \infty \}$

$B^c = \{ x \mid -\infty < x < 1.5 \} \cup \{ x \mid 3 \leq x < \infty \}$

$C^c = \{ x \mid -\infty < x < 1 \} \cup \{ x \mid 4 < x < \infty \}$

$D^c = \{ x \mid x < 4 \}$

مثال 10

أوجد العلاقات التي تربط بين المجموعات التالية:

Find all relationships between the following sets

a) Let $A = \{ 1 , 3 , 5 \}$ and $B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

we notice here that $A \subseteq B$

b) Let $A = \{-2 , +2\}$ and $B = \{ x \mid x^2 = 4\}$

solving the quadratic equation $x^2 = 4$ gives the solution $x = \mp 2$. Therefore, $A = B$

3-3 الفترات Intervals:

كما رأينا سابقاً وعند الحديث عن خاصية الترتيب لمجموعات الأعداد وبالأخص الأعداد الحقيقية Properties in Real Numbers هي:

If a and b are real numbers, such that a is less than b. Then, we write $a < b$ which is called an inequality.

وفي هذا المبحث سنركز على وصف هذه المتباينة ومماثلاتها بشكل فترات Intervals كالآتي:

a) If a and b are real numbers, such that $a < b$. Then, the open interval from a to b, denoted by (a , b), is the set of all real numbers x that lie between a and b. Thus,

$$(a , b) = \{x \mid x \text{ is real number and } a < x < b\}$$

b) Similarly, the closed interval from a to b, denoted by $[a , b]$, is the set of all real numbers that lie between a and b together with a and b included. Thus,

$$[a , b] = \{x \mid x \text{ is real number and } a \le x \le b\}$$

c) Semi closed or Semi open intervals are defined as follows:

$$[a , b) = \{x \mid x \text{ is real number and } a \le x < b\}$$

$$(a , b] = \{x \mid \text{is real number and } a < x \le b\}$$

لجميع الفترات الأربعة (a , b) ، $[a , b]$ ، $(a , b]$ و $[a , b)$ الحدان b , a يعرفان على أنهما حدا الفترة endpoints بحيث أن الفترة المفتوحة لا تحتوي على الحد المفتوح فيه الفترة عندها أما الفترة المغلقة فتحتوي على الحد المغلق فيه الفترة عنده. ويمكن عرض الشكل الذي يمثل كل فترة كالآتي:

a) (a , b) — (a ////// b)

b) $[a , b]$ — [a ////// b]

c) $[a , b)$ — [a ////// b)

$(a , b]$

a b

ويلاحــظ هــنا مــدى التشــابه الكبيــر بين قراءة ورسم الفترات وتعريف المجموعات كما تم في المبحث السابق.

ويجب الإشارة هنا إلى أنه هناك بعض الفترات الغير محدودة Unbounded intervals لتعنــي جميع الفترات من الشكل أن تبدأ بقيمة معينة وتكون مفتوحة إلى $+\infty$ أو أن تبدأ من $-\infty$ وتنتهي بقيمة معينة. ومن أشكال هذه الفترات التالي:

a) $(a , \infty) = \{x : x > a\}$ a

b) $[a , \infty) = \{x : x \geq a\}$ a

c) $[-\infty , b) = \{x : x < b\}$ b

d) $(-\infty , b] = \{x : x \leq b\}$ b

وفــي نهاية المبحث سنعرض بعض الأمثلة المناسبة لقراءة الفترات ورسمها وعلاقاتها كالآتي:

مثال 11

اكتب التالي بشكل فترات :write the following in the interval form

a) $2 \leq x \leq 8$

الفترة التي تمثل هذه القيم هي الفترة المغلقة بالشكل:

$[2 , 8] = \{x : 2 \leq x \leq 8\}$

ورسمها بالشكل:

0 2 8

b) x > -4

هــذه الفتــرة المفــتوحة تمثل جميع القيم الحقيقية والتي تبدأ من القيمة 4-
بالشكل:

$$(-4 , \infty) = \{x : -4 < x < \infty\} = \{x : x > -4\}$$

ورسمها بالشكل:

-4 0

3.4 المتباينات الخطية بمتغير واحد:
Linear Inequalities in one variable

بالــرجوع لتعريف المعادلة الخطية بمتغير واحد Linear equation in one variable، وكما رأينا سابقاً، يمكن تعريف المتباينة الخطية بمتغير واحد ضمن هذا المبحث حيث أن الشكل العام للمتباينة بمتغير واحد هو أحد الحالات التالية:

$ax + b < 0$ or $ax + b > 0$

$ax + b \leq 0$ or $ax + b \geq 0$

where $a \neq 0$, a and b are real numbers.

وكمــا تم تعريف حل المعادلة الخطية يتم تعريف حل المتباينة الخطية بأحد الأشكال التالية:

General form for the solution of Linear inequality in one variable:

$x < -\frac{b}{a}$ or $x > -\frac{b}{a}$

$x \leq -\frac{b}{a}$ or $x \geq -\frac{b}{a}$

ولا بــد مــن الإشارة هنا إلى الرجوع للقوانين التي سبق ذكرها في خاصية التــرتيب المــتعلقة بمجموعة الأعداد الحقيقية عند حل الأمثلة والتي سيتم عرضها كالآتي:

مثال 12

أوجد حل المتباينات التالية:

Find all real numbers that satisfy the inequality

a) $2x \geq 1$

حل هذه المتباينة هو $x \geq \frac{1}{2}$ وذلك بقسمة طرفي المتباينة على العدد 2

b) $3x - 5 < 10$

وحل هذه المتباينة يتم بإضافة العدد 5 لطرفي المتباينة لنحصل على:

$3x < 15$

ومن ثم نقسم طرفي المتباينة على العدد 3 لنحصل على الحل $x < 5$

c) $3 - x \leq 2x + 4$

لحل هذه المتباينة نضيف x لطرفي المتباينة لنحصل على:

$3 \leq 3x + 4$

ثم نقوم بطرح العدد 4 من طرفي المتباينة لنحصل على:

$-1 \leq 3x$

وأخيراً نقوم بقسمة طرفي المتباينة على العدد 3 لنحصل على الحل:

$-\frac{1}{3} \leq x$ or $x \geq -\frac{1}{3}$

مثال 13

أوجد حل المتباينات التالية Solve the following inequalities:

a) $5 - 2x < 7$

حل هذه المتباينة يتم بطرح العدد 5 من طرفي المتباينة لنحصل على:

$-2x < 2$

وعـند قسمة طرفي المتباينة على العدد (2−) لإيجاد الحل، علينا مراعاة أن القسمة على عدد سالب يعكس شكل المتباينة وبالتالي نحصل على:

$x > -1$

b) $5x - \frac{1}{2} < x + 3$

يمكـــن حل هذه المتباينة بعدة طرق منها يمكن ضرب طرفي المتباينة بالعدد 2 وذلك للتخلص من العدد $\frac{1}{2}$ ولتسهيل العمليات الحسابية فنحصل على:

$10\,x - 1 < 2\,x + 6$

وبطـــرح 2x مـــن طرفي المتباينة وكذلك بإضافة العدد 1 للطرفين نحصل على:

$8x < 7$

وأخيراً وعند قسمة طرفي المتباينة على العدد 8 نحصل على الحل وهو:

$x < \frac{7}{8}$

مثال 14

حل المتباينة المزدوجة التالية:

Solve the double inequality for x

$5 < 2x + 7 < 13$

في هذه المتباينة المزدوجة يظهر المتغير x في وسط الشكل وبالتالي فإن حل هذه المتباينة المزدوجة سيتم بحل المتباينتين الناتجتين معاً كالآتي:

نبدأ بطرح العدد 7 من جميع أطراف هذه المتباينة لنحصل على:

$-2 < 2x < 6$

وبالقسمة على العدد 2 نحصل على الحل وهو:

$-1 < x < 3$

مثال 15

حل المتباينة المزدوجة التالية:

Solve the double inequality

$2x + 1 < 3 - x < 2x + 5$

لحل هذا النوع من المتباينات المزدوجة علينا أولاً قراءتها على شكل متباينين كالآتي:

المتباينة الأولى $2x + 1 < 3 - x$

المتباينة الثانية $3 - x < 2x + 5$

ثم نقوم بحل كل منها على حدة كالآتي:

a) $3x + 1 < 3 - x$

$4x < 2$

$x < \frac{1}{2}$

b) $3 - x < 2x + 5$

$-3x < 2$

$x > -\frac{2}{3}$

وبالتالي فإن حل المتباينة المزدوجة هو:

$x < \frac{1}{2}$ and $x > -\frac{2}{3}$

ويمكن كتابة الحل بالشكل النهائي التالي:

$$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$$

أما عن تطبيقات المتباينات فكثيرة منها التطبيقات التي تخص تحديد الأرباح Manufacturer's profit والذي سيعرض في المثال (16) التالي، وتطبيقات الاستثمار Investment والذي سيتم في المثال (17) التالي وكذلك تطبيقات اتخاذ

القـــرارات بشـــأن الإنتاجـــية Production Decision والذي سيتم في المثال (18) التالي:

مثال 16

مصـــنع للأجهـــزة الإلكترونية يبيع الأجهزة المنتجة لديه بسعر 100 دينار للجهـــاز الواحد، علماً بأن التكاليف الأسبوعية هي 10000 دينار وأن تكلفة الجهاز الـــواحد هـــو 80 ديـــناراً. أوجد عدد الأجهزة الإلكترونية التي باستطاعة المصنع صنعها وبيعها أسبوعياً لتحقيق ربحاً أسبوعياً 1000 دينار على الأقل.

The manufacturer of electronic appliances can sell all he can produce at the selling price of 100 J.D. each. It costs him 80 J.D. to produce each item, and he has overhead costs of 10000 J.D. per week. Find the number of units he should produce and sell to make a profit of at least 1000 J.D. per week.

لنفرض أن عدد الأجهزة المنتجة والمباعة لهذا المصنع هي x وبالتالي فإن:

الكلفة Cost = $10000 + 80\,x$

العائد Revenue = $100\,x$

الربح Profit = Revenue – Cost

$$P = 100\,x - (10000 + 80\,x)$$

$$P = 20\,x - 10000$$

ولـــذلك فـــإن قيمة x ، أي عدد الأجهزة المنتجة والمباعة والتي تحقق ربحاً على الأقل 1000 دينار أسبوعياً هي قيمة x التي تحقق التالي:

$$P \geq 1000$$

ويعني ذلك:

$$20\,x - 10000 \geq 1000$$

ويمكن حل هذه المتباينة بإضافة 10000 لطرفي المتباينة ثم القسمة على 20 لنحصل على:

$$x \geq \frac{9000}{20}$$

أي أن:

$$x \geq 450$$

ويعنـــي ذلـــك أن على المصنع أن ينتج على الأقل 450 جهاز لتحقيق على الأقل 1000 ديناراً كربح أسبوعي.

مثال 17

يســتطيع أحـــد رجـــال الأعمال استثمار 7000 ديناراً بحيث يضع قسم منه بمعدل ربح 7% والباقي بمعدل رقم 10%. ما هي الكمية القصوى التي يجب عليه أن يستثمرها بالمعدل 7% لتحقيق على الأقل 500 دينار كربح سنوي.

A Business man has 7000 J.D. to invest. He wants to invest some of it at 7% and the rest at 10%. What is the maximum amount he should invest at 7% if he wants an annual invest income of at least 500 J.D. per year.

لنفرض أن الكمية التي سيضعها بمعدل ربح 7% هو x وبالتالي فإن الكمية التـــي سيضعها بمعدل ربح 10% هو (7000-x). ولتحقيق ربحاً على الأقل 500 دينار لدينا المتباينة التالية:

$$7\% \, x + 10\% \, (7000 - x) \geq 500$$

أي أن:

$$0.07\, x + 700 - 0.10\, x \geq 500$$

أي أن:

$$-0.17\, x \geq -200$$

وبالتالي فإن:

$x \leq \dfrac{200}{0.17}$ ويعني ذلك أن $x \leq 1176.47$

وبالتالـــي فـــإن رجل الأعمال يمكن أن يضع 1176.47 ديناراً كحد أقصى بالمعدل 7% لتحقيق الربح المعين.

مثال 18

يود مدير مصنع اتخاذ القرار بشأن التصنيع من عدمه لأحد الأجهزة الواجب تهيئـــتها لإدارة مصـــنعه، فإذا أراد شراء هذا الجهاز من الخارج فإن تكلفة الجهاز الـــواحد 1.5 ديـــناراً أما إذا أراد تصنيعه في المصنع فإنه سيزيد من الكلفة الكلية بالمقدار 500 ديناراً شهرياً علماً أن تكلفة الجهاز الواحد هو 1 دينار. فما هو عدد الأجهزة التي عليه تهيئتها شهرياً ليستطيع اتخاذ القرار بشأن تصنيع الأجهزة داخل المصنع.

The management of a manufacturing firm wants to decide whether they should manufacture their own items, which the firm has been purchasing from outside suppliers at 1.5 J.D. each. Manufacturing the item will increase the overhead costs of the firm by 500 J.D. per month, and the cost of the item will be 1 J.D. How many items would have to be used by the firm each month to justify a decision to manufacture their own items.

لأجـــل اتخاذ القرار بشأن التصنيع داخل المصنع يجب أن تكون كلفة الشراء أكبر من كلفة التصنيع كالآتي:

Cost of purchasing	>	Cost of manufacturing
$1.5x$	>	$x + 500$
$0.5x$	>	500
X	>	1000

لـــذلك فـــإذا احـــتاج المصنع على الأقل 1000 جهاز شهرياً على صاحب المصنع تصنيعها في الداخل.

3.5 المتباينات التربيعية بمتغير واحد:
Quadratic Inequalities in one variable

وكما تم تعريف المعادلة التربيعية بمتغير واحد، سابقاً، بالشكل العام التالي:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

where $a \neq 0$, a , b , and c are real constants

يمكن تعريف المتباينة التربيعية بمتغير واحد بأحد الأشكال التالية:

$$a x^2 + b x + c > 0$$

$$a x^2 + b x + c \geq 0$$

where $a \neq 0$. a , b , and c are real constants

وبـــنفس الأسلوب الذي تم اتباعه لحل المعادلات التربيعية، كما ورد سابقاً، نستطيع حل المتباينات التربيعية والأمثلة التالية تشير إلى المعنى كالآتي:

مثال 19

حل المتباينة التالية Solve the following inequality:

$$x^2 - 3 x > 0$$

سنقوم بحل هذه المتباينة أولاً عن طريق تحويلها إلى معادلة لنحصل على:

$$x^2 - 3 x = 0$$

وباستخراج الحد المشترك x نحصل على:

$$x (x - 3) = 0$$

وذلك يعني أن أصفار المعادلة التربيعية هما $x = 0$ و $x - 3 = 0$ والذي يعني أن $x = 3$

نقوم الآن برسم هاتين النقطتين على خط الأعداد الحقيقية وتحديد الإشارات كالآتي:

إشارة x: — — — — | — — — — | + + + +   (النقطتان: -3 ، 0)

إشارة x - 3: — — — — | + + + + | + + + +   (النقطتان: -3 ، 0)

ولـــتحديد الإشـــارة الموجبة للمتباينة $x^2 - 3 > 0$ والذي يمثل الحل فإن الحل هو:

$x < -3$ or $x > 0$

مثال 20

حل المتباينة التربيعية التالية Solve the following inequality:

$$x^2 + 3x - 4 \le 0$$

وبـــنفس الأسلوب المتبع في المثال السابق نحول المتباينة إلى معادلة تربيعية كالآتي:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

وباستخدام أسلوب التحليل إلى العوامل نحصل على:

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

وعند حل كل من حدود المعادلة نحصل على الحل:

$x = -4$ or $x = 1$

ولتحديد الإشارة لدينا:

إشارة $x - 1$:   − − − − (قبل −4)   − − − − (بين −4 و 1)   + + + + (بعد 1) — النقاط: −4، 0، 1

إشارة $x + 4$:   − − − − (قبل −4)   + + + + (بين −4 و 1)   + + + + (بعد 1) — النقاط: −4، 0، 1

وبالتالي فإن حل المتباينة التربيعية سيكون عندما $-4 \le x \le 1$

3-6 القيم المطلقة Absolute values:

If x is a real number, then the absolute value of x, denoted by $|x|$, is defined by:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

for example: $|2| = 2$, $|-3| = -(-3) = 3$, and $|0| = 0$.

وبالتالي فإنه من الواضح أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب nonnegative real numbers ويعني ذلك أن $|x| \geq 0$.

وهناك بعض العلاقات الواجب معرفتها قبل الدخول في حساب القيم المطلقة والتي سيتم عرضها كالآتي (بدون براهين لأنها خارجة عن أهداف هذا الكتاب):

1) If $|a| = b$, where $b \geq 0$ then either
$a = b$ or $a = -b$

2) If $|a| = |b|$, then either $a = b$ or $a = -b$

3) $|x| = |-x| = \sqrt{x^2}$

4) $|x| < a$ if and only if $-a < x < a$

5) $|x| > a$ if and only if either $x > a$ or $x < -a$

6) $|a\, b| = |a| \, . \, |b|$

7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

والآن سنقوم بعرض بعض الأمثلة للتعامل مع مفهوم القيم المطلقة وباتباع العلاقات التي ورد ذكرها أعلاه لحل المعادلات والمتباينات والمتضمنة لمفهوم القيمة المطلقة كالآتي:

مثال 21

أوجد قيمة x لكل مما يأتي :Solve for x

a) $|2x - 4| = 6$

بالـــرجوع لتعـــريف القيمة المطلقة واستخدام العلاقة رقم (1) أعلاه نجد أن لدينا:

$2x - 4 = 6$ or $2x - 4 = -6$

وبحل كل واحدة من هاتين المعادلتين بالطرق السابق ذكرها نحصل على:

$x = 5$ or $x = -1$

b) $|2x + 5| = |3x - 1|$

وبالـــرجوع لتعريف القيمة المطلقة واستخدام العلاقة رقم (2) أعلاه نجد أن لدينا:

$2x + 5 = 3x - 1$ or $2x + 5 = -(3x - 1)$

$2x + 5 = 3x - 1$ or $2x + 5 = -3x + 1$

وبحل كل واحد من هاتين المعادلتين بالطرق السابقة نحصل على:

$x = 4$ or $x = \frac{-4}{5}$

مثال 22

عبر عن ما يلي باستخدام القيم المطلقة:

Express the following using absolute values

a) x is at distance of 2 units from 5: $|x - 5| = 2$

b) x is at most 3 units from 4: $|x - 4| \leq 3$

c) x is at least 5 units from 4: $|x - 4| \geq 5$

d) x is greater than 8 units from 3: $|x - 3| > 8$

e) x is within a units from c: $|x - c| \leq a$

مثال 23

أوجد قيمة x التي تحقق المتباينات التالية:

Solve for x the following inequalities

a) $|3x - 4| < 5$

بالرجوع لتعريف القيمة المطلقة واستخدام العلاقة رقم (4) أعلاه نجد أن:

$$-5 < 3x - 4 < 5$$

وبالرجوع لحل المتباينة المزدوجة أعلاه (كما رأينا سابقاً) وبإضافة العدد 4 لأطراف المتباينة نحصل على:

$$-1 < 3x < 9$$

ثم بالقسمة على العدد 3 نحصل على الحل:

$$-\frac{1}{3} < x < 3$$

b) $|3x - 4| > 7$

وبالرجوع لتعريف القيمة المطلقة واستخدام العلاقة رقم (5) أعلاه نجد أن:

$3x - 4 > 7$ or $3x - 4 < -7$

سنحل كل من هاتين المتباينتين كالآتي:

$3x > 11$ or $3x < -3$

$x > \frac{11}{3}$ or $x < -1$

مثال 24

أوجد ناتج كل مما يأتي Evaluate the following:

a) $|(2)(3)| = |2|\,|3| = 2 \cdot 3 = 6$

b) $|(-2)(3)| = |-2|\,|3| = 2 \cdot 3 = 6$

c) $|(x - 2)(x + 3)| = |x - 2|\,|x + 3|$

d) $\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right| = \dfrac{|x-2|}{|x+3|}$, $x \neq -3$

مثال 25

حل المتباينة التالية Solve the following inequality:

$$\left|\frac{2x-3}{7}\right| \geq 1$$

بالرجوع لتعريف القيمة المطلقة واستخدام العلاقة رقم (5) أعلاه نجد أن:

$$\frac{2x-3}{7} \geq 1 \quad \text{or} \quad \frac{2x-3}{7} \leq -1$$

وسنقوم بحل كل من هاتين المتباينتين كالآتي:

$2x - 3 \geq 7$ or $2x - 3 \leq -7$

$2x \geq 10$ or $2x \leq -4$

$x \geq 5$ or $x \leq -2$

أسئلة الفصل الثالث
Exercises for chapter three

اكتب المجموعات التالية Describe the following sets للأسئلة (1-8):

1) The set of natural numbers less than 10.

2) The set of even integers greater than 3.

3) The set of all prime natural numbers less than 20.

4) The set of real numbers in the interval [-1 , 1].

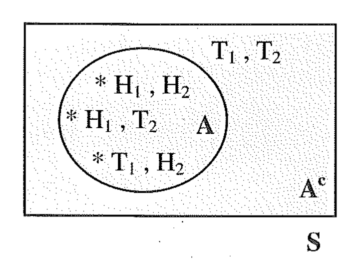
5) The set of real numbers greater than –5 and less than or equal to 3.

6) The set of real numbers greater than of equal to zero.

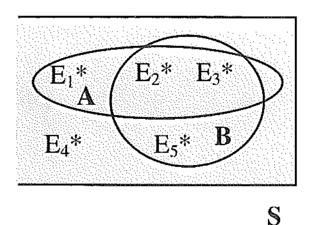
7) The set of real numbers and $x^2 - x - 2 = 0$

8) The set of all numbers y such that $y = \frac{1}{h+1}$, where h is a natural numbers.

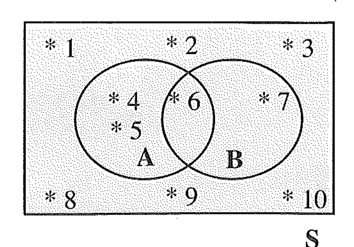
9) Write S , A, and A^c. Then find $A \cup A^c$, $A \cap A^c$



10) Write S , A , and B. The find $A \cap B$, $A \cup B$, A^c , B^c , $A^c \cap B^c$, $A^c \cup B^c$ for the following three cases.



*E1
A
*E7
*E2
*E4
*E5
E3*
B
E6*
S



11) Let $\Omega = R$

$A = \{x : -1 \le x \le 1\}$

$B = \{x : x \ge 0\}$

$C = \{x : x > -1\}$

$D = \{x : x < 1\}$

Find: $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$, $C \cap D$, A^C, B^C, C^C, D^C, $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$, $B \cup C$, $B \cup D$, $B \cup D$, $(A \cap B)^C$, $(A \cup B)^C$, $(A \cap C)^C$, $(A \cup C)^C$, $(A \cap D)^C$, $(A \cup D)^C$, $(B \cap C)^C$, $(B \cup C)^C$, $(B \cap D)^C$, $(B \cup D)^C$, $(C \cap D)^C$, $(C \cup D)^C$, $A^C \cap B^C$, $A^C \cup B^C$, $A^C \cap C^C$, $A^C \cup C^C$, $A^C \cap D^C$, $A^C \cup D^C$, $B^C \cap C^C$, $B^C \cup C^C$, $B^C \cap D^C$, $B^C \cup D^C$, $C^C \cap D^C$, and $C^C \cup D^C$

حل المتباينات التالية Solve the following inequalities للأسئلة (12-27):

12) $3 - 2x \ge 7$

13) $31 - 3y < 5y + 7$

14) $2(3x - 1) > 2 + 5(x - 1)$

15) $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} > 1 + \frac{2x-1}{5}$

16) $5 - \frac{1}{3}x < 2 + \frac{1}{2}(x+1)$

17) $2x + \frac{7}{9} < 13$

18) $7 < 2x + 5 < 13$

19) $-4 < x - 2 < 4$

20) $6x - 11 < 3x + 1 < 5x - 7$

21) $2x > x + 1 > 3x - 5$

22) $(x + 2)(x + 3) > (x - 2)^2$

23) $(3x + 1)(x - 2) < (x - 4)(3x+3)$

24) $9 \le 4 - 6x < 12$

25) $x^2 - 3x > 10$

26) $\frac{4x-10}{x-2} > 3$

27) $1 \le \frac{1-3x}{4} \le 4$

حل لإيجاد قيمة x لكل مما يأتي Solve for x للأسئلة (28-39):

28) $|x - 5| = 2$

29) $|4x - 3| = |3x + 5|$

30) $|x - 2| < 3$

31) $|x + 5| \ge 2$

32) $\frac{1}{|3x-5|} < 2$

33) $|6x - 2| = 7$

34) $|6x - 7| = |3 + 2x|$

35) $\left|\frac{x+5}{2-x}\right| = 6$

36) $|x + 6| < 3$

37) $|2x - 3| \leq 6$

38) $|x + 2| > 1$

39) $\left|\frac{2-5x}{4}\right| \geq 3$

حل التطبيقات التالية Solve the following applications للأسئلة (40-42):

40) لدى شخص 5000 دينار للاستثمار بحيث يضع قسم منها بمعدل ربح 6% والباقي بمعدل ربح 8%. فإذا رغب الشخص بتحقيق ربح سنوي قدره على الأقل 370 ديناراً. ما هي الكمية القصوى التي يجب أن يستثمرها بمعدل 6% لتحقيق ذلك الربح.

A man has 5000 J.D. which he wants to invest. Some at 6% and the rest at 8%. If he wants an annual interest income of at least 370 J.D. what is the maximum amount he should invest at 6%.

41) شركة تستطيع بيع كل ما تنتجه من وحدات مصنعة بسعر 200 دينار للوحدة الواحدة. التكلفة الشهرية الثابتة للشركة هي 30000 دينار وكلفة تصنيع الوحدة الواحدة هو 130 دينار. أوجد عدد القطع الواجب تصنيعها وبيعها شهرياً لتحقيق ربح شهري على الأقل 2500 دينار.

A company can sell all the units produced at a price of 200 J.D. each. Monthly fixed costs are 30000 J.D. and the units cost 130 J.D. each. Find the number of units which must be manufactured and sold each month to obtain a monthly profit of at least 2500 J.D.

42) مصنع لصناعة السيارات يرغب في اتخاذ القرار بشأن تصنيع قطع معينة يحتاج إليها في صنع السيارات والتي كان يشتريها من مصنع آخر بسعر 3.00 دينار للقطعة الواحدة. تصنيع هذه القطع سيزيد من الكلفة الثابتة للمصنع

أسـبوعياً 1000 ديـنار مضافاً على كلفة صنع الوحدة الواحدة بمقدار 1.90 ديـنار. أوجـد عدد القطع التي يحتاجها المصنع أسبوعياً لاتخاذ القرار بشأن تصنيعها داخل المصنع.

A firm manufacturing cars wants to know whether to manufacture their own gaskets, which the firm has been purchasing from outside supplier at 3.00 J.D. for each unit. Manufacturing the items will increase the overhead costs by 1000 J.D. each week ant it will cost 1.90 J.D. to manufacture each gasket. How many gaskets must be used by the firm each week to justify manufacturing the gaskets in the firm.

الفصل الرابع

الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية

4

وتشغيلها

ارية والاقتصادية

الفصل الرابع
الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية
Straight lines and Systems of Linear Equations

4-1 مقدمة Introduction:

تــم فــي الفصل الثاني دراسة المعادلات الخطية Linear Equations بجميع تفاصــيلها، وفــي هذا الفصل سيتم التعامل مع الخطوط المستقيمة Straight Lines والتــي تمــثل المعادلات الخطية ورسوماتها التي تتضح بكونها خطوط مستقيمة. وكــذلك سيتم التعرف في هذا الفصل على أنظمة المعادلات الخطية Systems of Linear Equations والذي يمثل معادلة خطية أو أكثر One Linear Equation or More. وكــذلك ســيتم التعــرف في هذا الفصل على كثير من المفاهيم الرياضية Mathematical Concepts المــرادفة لهــذه الدراسة ومنها الإحداثيات الكارتيزية Cartesian Coordinates، المســافة بــين نقطتين Distances، ميل الخط المستقيم Slope وكذلك على طريقة رسم المعادلات الخطية Graph of Linear Equations.

وسيتضمن الفصل أيضاً على كثير من الأمثلة Examples وكثير من الأمثلة التطبيقــية Applied Examples لتوضــيح أهمــية مفاهيم هذا الفصل في الجانب التطبيقي وكذلك سيتضمن الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

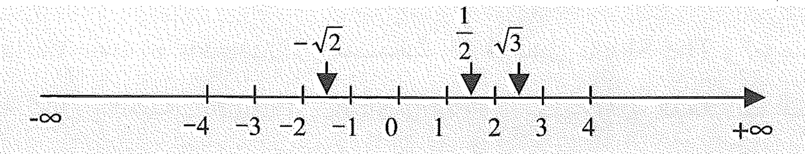
سيتضــمن الفصــل عدة مباحث هي المبحث 2-4 نظام المحاور الكارتيزية Cartesian Coordinates System والمــبحث 3-4 صيغة المسافة The Distance Formula والمــبحث 4-4 رســم المعادلات الخطية لمتغيرين Graphing Linear Equations in two Variables والمــبحث 5-4 الميل The Slope والمبحث 6-4 صيغة الميل والنقطة Point-Slope Formula والمبحث 7-4 المعادلات الخطية أو المســتقيمات الأفقــية والعمودية Horizontal and Vertical Lines والمبحث 8-4 الخطــوط المســتقيمة المــتوازية والمتعامدة Parallel and Perpendicular Lines والمــبحث 9-4 تطبيقات ورسم المعادلات الخطية Applications and Graphing

Systems والمبحث 10-4 أنظمة المعادلات الخطية لمتغيرين linear equations of linear equations in two variables، وأخيراً المبحث 11-4 أنظمة المعادلات الخطية لثلاث متغيرات System of linear equations in three variables.

4-2 نظام المحاور الكارتيزية Cartesian coordinates system:

يعتبر نظام الأعداد الحقيقية هو القاعدة الأساسية لهذا الفصل ولهذا الكتاب بصورة عامة في نفس الوقت، حيث أن هذا النظام The system of real numbers هو مجموعة من الأعداد الحقيقية مع بعض العمليات الجبرية من جمع وطرح وضرب وقسمة addition, subtraction, multiplication and division للأعداد الحقيقية كما تم الحديث عنه وبكافة التفاصيل في الفصل الأول.

ويكون من المفيد والنافع لعرض مجموعة الأعداد الحقيقية وكما تم في الفصل الأول من خلال معنى الأعداد الحقيقية أن مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل خط line من القيم الحقيقية ويسمى هذا الخط بالخط الكارتيزي Cartesian coordinate أو أن تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على شكل رسم بياني يمثل خط مستقيم للأرقام numbers line. ويمكن تحديد نقطة point على هذا المستقيم بشكل عشوائي لتمثل الرقم صفر zero point وتمثل هذه النقطة نقطة البداية أو الأصل origin، ومن هذه النقطة نأخذ على الاتجاهين الأيمن والأيسر مسافات محددة ومتساوية لتحديد وحدات القياس unit of measurements ونضع الأعداد الحقيقية ونبدأ على جهة اليمين من الصفر right of zero الأعداد الموجبة من 1 صعوداً إلى ∞+ والأعداد السالبة على جهة اليسار من الصفر left of zero وأيضاً نبدأ من 1- نزولاً إلى ∞-، وكما هو واضح من الشكل رقم (1) التالي:



الشكل رقم (1)

رسم خط الأعداد الحقيقية

وبالتالي يمكن تلخيص ما ورد أعلاه في التعريف التالي:

الخط الكارتيزي Cartesian line: هو الخط من الأعداد الحقيقية والمتمثل بنقطة الأصل origin واتجاه موجب positive direction ووحدة قياس unit of measurements، بحيث أن هناك علاقة واحد لواحد one-to-one بين مجموعة الأعداد الحقيقية set of real numbers والنقاط التي تقع على الخط الكارتيزي أو ما يسمى بخط الأعداد الحقيقية real line.

أما عندما يكون لدينا محورين متعامدين perpendicular lines أحدهما أفقي horizontal line والآخر عمودي vertical line يتقاطعان عند نقطة الأصل origin عندئذٍ يمثل تمثيل النقاط في مستوى plane والذي يسمى نظام المحاور الكارتيزية Cartesian coordinate system.

يسمى المستقيم الأفقي باسم الإحداثي السيني x-axis ويسمى المستقيم العمودي باسم الإحداثي الصادي y-axis وهذان المستقيمان يتقاطعان في نقطة تسمى بنقطة الأصل origin وهي النقطة (0,0)، حيث أن الإحداثي السيني لها صفر والإحداثي الصادي أيضاً صفر.

ولتحديد مقياس الرسم للنظام ترتب القيم الموجبة على يمين نقطة الأصل والقيم السالبة على يسار نقطة الأصل بالنسبة للإحداثي الأفقي x-axis

Positive numbers to the right of the origin and negative numbers to the left of the origin.

أما بالنسبة للإحداثي الصادي y-axis فإن القيم الموجبة تكون أعلى نقطة الأصل أما القيم السالبة فتكون أسفل نقطة الأصل

Positive numbers lying above the origin and negative numbers lying below the origin.

أما عن مقاييس الرسم unit of measurements فلا تحتاج أن تكون نفسها وقد تم عمل ذلك فعلاً في التطبيقات المختلفة حيث يمكن عرض كميات مختلفة لكل محور فمثلاً عندما يمثل المحور السيني x عدد الحاسبات المباعة ويمثل المحور

الصـــادي y المبالغ العائدة من البيع فإن مقاييس الرسم يفضل أن تكون مختلفة في وحـــدة القـــياس different number of scales وبالتالـــي يمكـــن تلخيص ما سبق بالتعريف التالي:

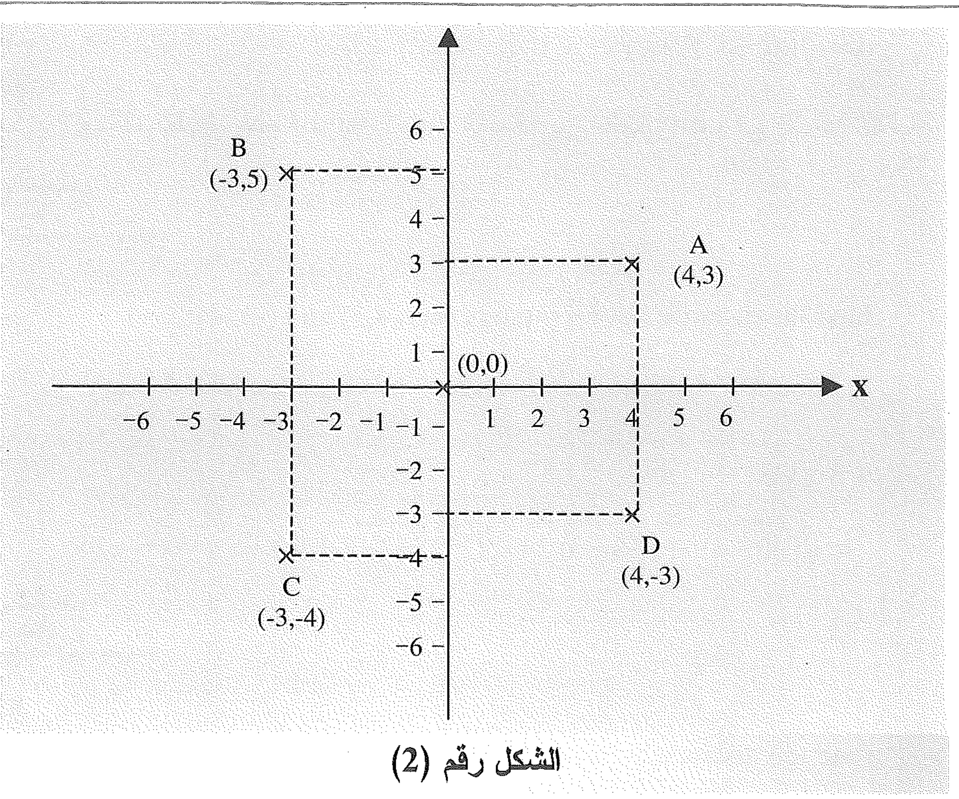
الخطـوط الكارتيـــزية Cartesian coordinates: أو مـــا يسمى بالمستوى الكارتيـــزي Cartesian plane هـــو زوج من المحاور المتعامدة في نقطة الأصل (0,0) ويسميان بالإحداثي السيني x-axis والإحداثي الصادي y-axis.

ويمكن رسم النقاط points والمعادلات equations والدوال functions عادة على هذه الإحداثيات كالآتي:

الـــنقطة point فـــي المســـتوى plane يمكن عرضها وتمثيلها بشكل أحادي uniquely فـــي أي مكان على هذا المستوى بواسطة الأزواج المرتبة order pairs مـــن الأعداد. والزوج (x , y) حيث أن x يمثل الرقم الأول first number و y يمثل الثانـــي second number وهمـــا الإحداثي السيني x والإحداثي الصادي y للنقطة (x , y) والتي يمكن رسمها على المستوى xy-plane .

الشكل رقم (2) التالي يمثل المستوى xy-plane ورسم النقاط التالية: النقطة A بالإحداثـــيات (3 , 4) والـــنقطة B بالإحداثيات (5 , -3) والنقطة C بالإحداثيات (-4 , -3) والنقطة D بالإحداثيات (-3 , -4) وكذلك نقطة الأصل (0 , 0).

هذا الشكل يمثل المحورين المتعامدين في نقطة الأصل (0 , 0) حيث يقسمان المســـتوى xy-plane إلى أربعة أجزاء متساوية هي الربع الأول والذي يمثل جميع النقاط بالقيم الموجبة لـــx والقيم الموجبة لـــy والربع الثاني الذي يمثل جميع النقاط بالقيم السالبة لـــx والقيم الموجبة لـــy والربع الثالث والذي يمثل جميع النقاط بالقيم السالبة لـــx والقيم السالبة لـــy وأخيراً الربع الرابع والذي يمثل جميع النقاط بالقيم الموجبة لـــx والقيم السالبة لـــy.



الشكل رقم (2)

رسم النقاط D, C, B, A على المستوى xy-plane

ويلاحظ أنه وبصورة عامة لا توجد نقطتين على المستوى متساويتين، حيث أن $(x,y) \neq (y,x)$ ويمكن ملاحظة ذلك وبوضوح من النقطتين D,A.

4-3 صيغة المسافة The Distance Formula:

إحدى استخدامات نظام المحاور الكارتيزية Cartesian Coordinate System والمهمة هو إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى The distance between any two points in the plane من خلال الإحداثيات coordinates الخاصة بهذه النقاط.

بافتراض أن النقطتين هما (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) فإن المسافة بين هاتين النقطتين Distance between these two points، ويرمز لها بالرمز d، يمكن إيجادها وبواسطة نظرية بيثكورن Pythagorean theorem بالشكل التالي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وسيتم تطبيق هذه الطريقة لإيجاد المسافة بين نقطتين كما في الأمثلة التالية:

مثال 1

أوجد المسافة بين النقطتين C, A من الشكل السابق:

Find the distance between the points (4,3) and (-3,-4):

لإيجاد المسافة نستخدم العلاقة أعلاه using the distance formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3-4)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$$

مثال 2

أوجد المسافة بين النقطتين B, A

Find the distance between the points (-6,-6) and (6,6)

بتطبيق صيغة المسافة the distance formula لدينا:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-6-6)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2} = \sqrt{144+144} = \sqrt{288}$$

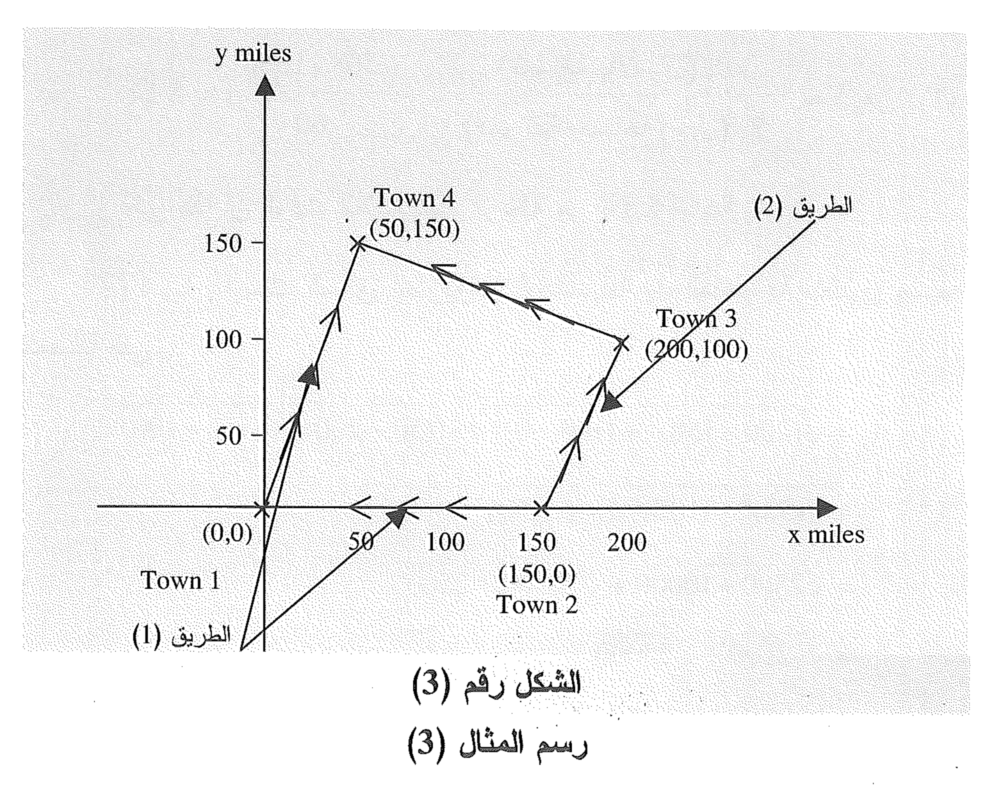
$$d = 16.97056$$

مثال 3

أربعة مدن 1، 2، 3، 4 كما في الشكل رقم (3) التالي. يراد ربط المدينتين 2 و 4 بطريقين سريعين. الطريق الأول (1) ينطلق من المدينة 2 إلى المدينة 4 من خلال المدينة 1 حيث أن الطريق الذي يربط المدينة 1 بالمدينة 4 هو طريق ساحلي. أما الطريق الثاني (2) فينطلق من المدينة 2 إلى المدينة 4 من خلال المدينة 3 حيث أنه يتضمن طريق جبلي بين المدينتين 3 و4. رغب أحد السائقين الذهاب من المدينة 2 إلى المدينة 4 بمعدل سرعة 60 ميل/ساعة باستخدام الطريق

الأول (1) وبمعدل سرعة 50 ميل/ساعة باستخدام الطريق الثاني (2). ما هو الطريق الذي يسلكه للوصول بوقت أقل.

Towns 1, 2, 3, and 4 are located as in figure (3). Two highways connect towns and 4. Highway (1), from town 2 to town 4 via town 1, includes coastal highway joining towns 1 and 4. And highway (2), from town 2 to town 4, includes a mountain highway joining towns 3 and 4. Driver wishes to drive from town 2 to town 4 and can drive with average of 60 mph using highway (1) and 50 mph using highway (2). Which road should he take minimizing the time spent for driving.



الشكل رقم (3)

رسم المثال (3)

لتحديد الطريق الذي سيستغرق وقتاً أقصر، علينا حساب الوقت اللازم لقطع الطريق (1) ومقارنته مع الوقت اللازم لقطع الطريق (2) كالآتي:

1) إذا سلك السائق الطريق (1) فالمسافة d_1 المقطوعة بتطبيق صيغة المسافة هي:

$$d_1 = \sqrt{(150-0)^2+(0-0)^2} + \sqrt{(50-0)^2+(150-0)^2}$$

$$= \sqrt{(150)^2+0^2} + \sqrt{(50)^2+(150)^2}$$

$$= \sqrt{(150)^2} + \sqrt{2500+22500}$$

$$= 150 + \sqrt{25000}$$

$$= 150 + 158.11383 = 308.11388$$

وبالتالي فإن الوقت Time اللازمة لقطع هذه المسافة هو T_1 كالآتي:

$$(T_1)\ \text{الزمن} = \frac{d_1\ \text{(المسافة بالأميال)}}{S_1\ \text{(السرعة بالساعة/ ميل)}} = \frac{308.11388}{60} = 5.14$$

ويعني هذا أن الوقت اللازم لهذه الرحلة هو 5.14 ساعة

2) أمـا إذا سلك السائق الطريق (2) فالمسافة d_2 المقطوعة بتطبيق صيغة المسافة هي:

$$d_2 = \sqrt{(200-150)^2+(100-0)^2} + \sqrt{(50-200)^2+(150-100)^2}$$

$$= \sqrt{(50)^2+(100)^2} + \sqrt{(-150)^2+(50)^2}$$

$$= \sqrt{2500+10000} + \sqrt{22500+2500}$$

$$= \sqrt{12500} + \sqrt{25000}$$

$$= 111.8034 + 158.114 = 269.9174 \approx 270$$

وبالتالي فإن الوقت Time اللازم لقطع هذه المسافة هو T_2 كالآتي:

$$(T_2)\ \text{الزمن} = \frac{d_2\ \text{(المسافة بالأميال)}}{S_2\ \text{(السرعة بالساعة/ ميل)}} = \frac{270}{50} = 5.4$$

ويعني هذا أن الوقت اللازم لهذه الرحلة هو 5.40 ساعة.

وبمقارنة الوقتين نقول بأن على السائق أن يسلك الطريق (1) بالوقت 5.14 ساعة وهو الوقت الأفضل والأقل.

4.4 رسم المعادلات الخطية لمتغيرين:
Graphing linear equations in two variables

المعادلــة الخطية لمتغيرين هي المعادلة التي يمكن تكتب بالشكل أو الصيغة التالية:

$$Ax + By = C$$

حــيث أن A , B , C هــي ثــوابت حقيقية ولكن ليس A , B كليهما صفر، وتسمى هذه الصيغة بالصيغة القياسية Standard form.

على سبيل المثال لدينا المعادلات التالية:

$$5x - 4y = 10 \ , \ y = 3x - 3 \ , \ y = -4 \ , \ x = 6$$

وجمــيعها معــادلات خطية بمتغيرين، حيث أننا نستطيع تحويل جميع هذه المعادلات من أشكالها العادية إلى الشكل أو المعادلة القياسية standard form.

أمــا حل المعادلة بمتغيرين فهو الأزواج المرتبة ordered pairs من الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة satisfy the equation.

فعلى سبيل المثال الزوج المرتب أو النقطة (3- , 0) هو الحل للمعادلة:

$-3x + 4y = -12$ وذلك لأن: $-3x + 4y = -3\ (0) + 4\ (-3) = -12$

مجمــوعة الحل solution set للمعادلة بمتغيرين هو المجموعة لجميع حلول المعادلة.

وعــندما نقول رسم المعادلة graph an equation لمتغيرين فإننا نعني رسم مجمــوعة الحل في المستطيل للمحاور set on a rectangular coordinate system وتكــون جميع النقاط أو الحلول على شكل خط مستقيم straight line. كذلك يمكن كــتابة المعادلــة الخطــية بمتغيرين linear equation in two variables بالصيغة التالية:

حيث أن: b , m ثوابت حقيقية.

وهـــي أيضـــاً تمثل معادلة خطية وأن رسمها يكون على شكل خط مستقيم، ســـوى أن هـــذا الشكل يدل على اعتماد المتغير y على المتغير x بالشكل الخطي mx + b وأن m يمثل ميل الخط المستقيم slope of the straight line وأن b يمثل الثابت أو المقطع على الإحداثي الصادي للخط المستقيم intercept of the straight line. وهذان المفهومان سيتم الحديث عنهما وبشكل أوسع لاحقاً.

المعادلـــة أو الصـــيغة الثانية $y = mx + b$ هي حالة خاصة من المعادلة أو الصيغة الأولى $Ax + By = C$ عندما يكون $B \neq 0$.

والرســـم يمكن أن يتم باستخدام أي من الصيغتين، حيث أننا نقوم برسم أي نقطتـــين مـــن مجموعة الحل Graph any two points from the solution set ثم نصل النقطتين بخط ليمثل رسم الخط المستقيم.

عندما يقطع الخط المستقيم أياً من المحاور x-axis أو y-axis فتلك النقاط أي نقـــاط التقاطع تسمى بالمساقط أو معاملات التقاطع intercepts. وأبسط طريقة أو أســـلوب لإيجاد هذه التقاطعات هو بافتراض أن $x = 0$ ثم إيجاد قيمة y المقابلة بعد الـــتعويض فـــي المعادلة الخطية لإيجاد معامل التقاطع x-intercept. ثم نفرض أن $y = 0$ وإيجـــاد قـــيمة x المقابلة بعد التعويض في المعادلة الخطية لإيجاد معامل التقاطع y - intercept. ومن المفضل أحياناً أن نجد نقطة ثالثة لغرض التأكد. ومن ثـــم رسم نقطتي التقاطع وإيصالهما بالخط المستقيم الذي يمثل رسم المعادلة الخطية والأمثلة التالية لتوضيح ذلك.

مثال 4

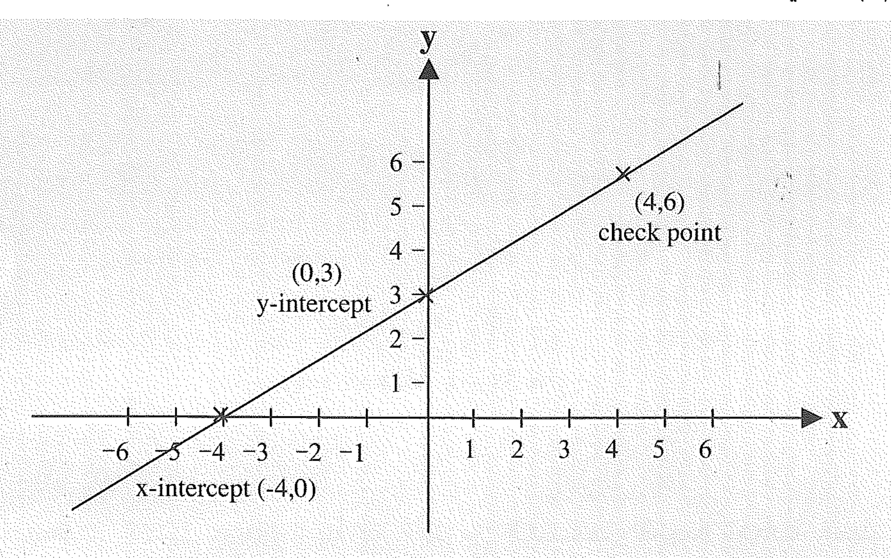
ارسم المعادلة التالية Graph the following equation:

$$-3x + 4y = 12$$

لأجـــل الرسم علينا تحديد بعض النقاط والتي تمثل بعض من حلول المعادلة كالآتي:

X	-4	0	4
Y	0	3	6

ومـــن الواضح أننا اخترنا قيمة موجبة وهي 4 وقيمة سالبة وهي −4 ونقطة الصـــفر لعمـــل هذا الجدول المصغر من القيم المحتملة للمعادلة. وكذلك يلاحظ أن النقطتين (0,3) و(0 , 4-) هما نقطتا تقاطع المعادلة مع الإحداثيين السيني والصادي intercepts. وبتعيـــين تلك النقاط على xy-plane يكون الرسم كما في الشكل رقم (4) التالي:



الشكل رقم (4)

رسم المعادلة $-3x + 4y = 12$

مثال 5

ارسم المعادلة التالية Graph the following equation:

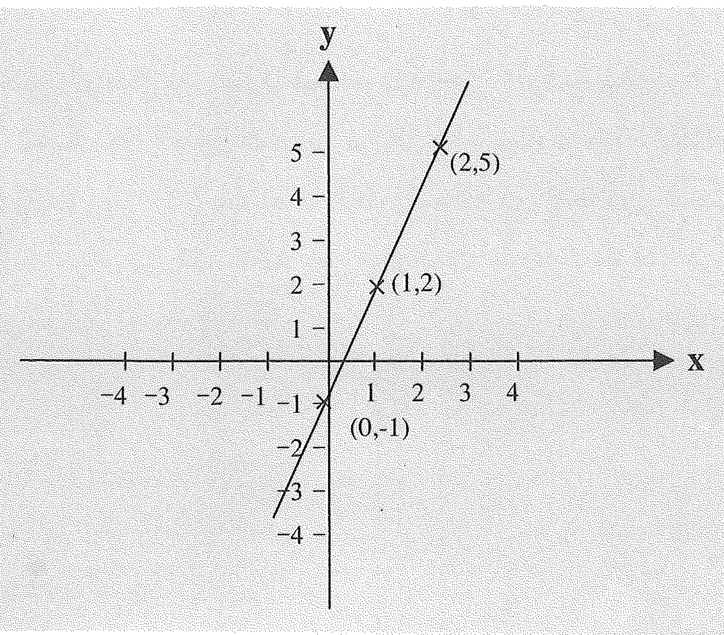
$y = 3x - 1$

لأجل الرسم يمكننا إيجاد وتحديد النقاط التالية:

X	0	1	2
Y	-1	2	5



ويكون الرسم كما في الشكل رقم (5) التالي:



الشكل رقم (5)

رسم المعادلة y = 3x - 1

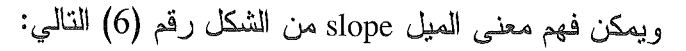
4-5 الميل Slope:

يعتبـــر المـــيل slope للخط المستقيم من الخصائص المهمة للمعادلة الخطية ومقـــياس رقمـــي مفـــيد جـــداً لقياس انحدار الخط المستقيم، ولهذا فإن فكرة الميل استخدمت بشكل واسع لهذه الغاية. والميل slope، والذي يرمز له بالرمز m، للخط المســـتقيم المار بنقطتين two points (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) يمكن إيجاده من خلال الصيغة التالية The following formula:

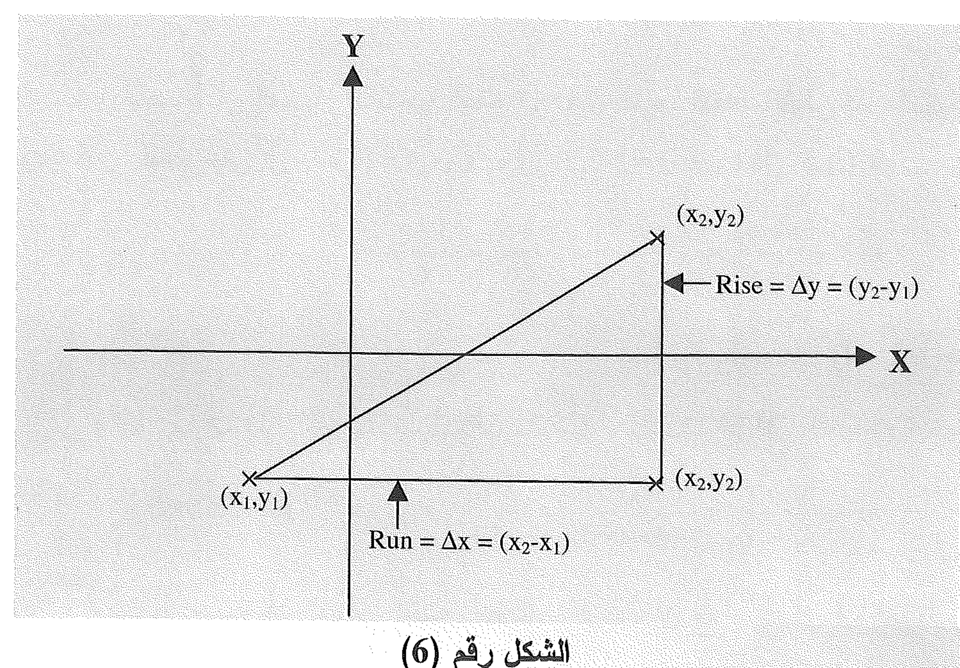
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Rise}{Run}$$

حيث أن Δx يمثل مقياس التغير في قيمة x ، وتقرأ دلتا x

وأن Δy يمثل مقياس التغير في قيمة y ، وتقرأ دلتا y



ويمكن فهم معنى الميل slope من الشكل رقم (6) التالي:



الشكل رقم (6)

توضيح معنى الميل slope

ويلاحـــظ هنا أن الميل للخط المستقيم الأفقي يساوي صفراً، أما الميل للخط المستقيم العمودي فهو غير موجود أو غير معرف.

The slope of a horizontal line is zero, and the slope of a vertical line is not defined.

يمكن إيضاح ذلك بالمثال التالي:

مثال 6

أوجد الميل للخط المستقيم لكل زوج من النقاط:

Find the slope of the line through each pair of points.

a) (-2 , 5) and (4 , -7)

الميل للخط المار بالنقطتين بافتراض أن $(x_1,y_1) = (-2\ ,\ 5)$ وأن $(x_2,y_2) = (4,-7)$ هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-5}{4-(-2)} = \frac{-12}{4+2} = \frac{-12}{6} = -2$$

ويلاحظ أن الميل لا تتغير قيمته في حال تغيير النقاط الأولى بدل الثانية وبالعكس. فبافتراض أن $(x_1,y_1) = (4,-7)$ وأن $(x_2,y_2) = (-2,5)$ فإن الميل هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-7)}{-2-4} = \frac{5+7}{-6} = \frac{12}{-6} = -2$$

b) (-3 , -1) and (-3 , 5)

بافتراض أن $(x_1,y_1) = (-3,-1)$ وأن $(x_2,y_2) = (-3,5)$ هو فإن الميل هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{-3-(-3)} = \frac{5+1}{-3+3} = \frac{6}{0} \qquad \text{not defined}$$

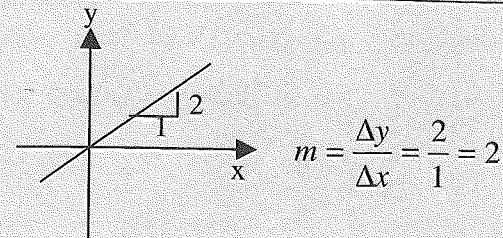
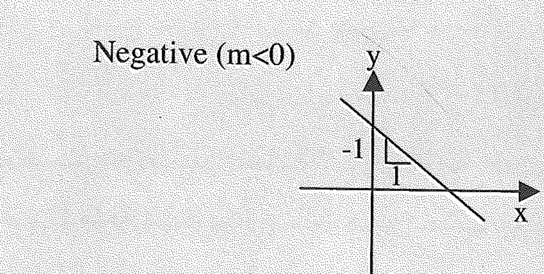
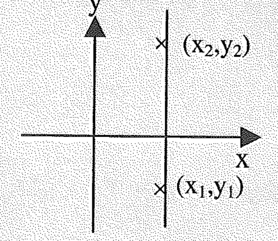
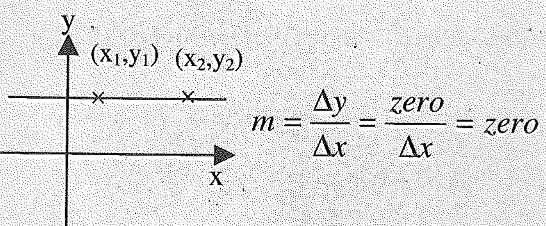
ويعني هذا أن الميل غير معرف والسبب أن $x_2 = x_1$ أي أن المستقيم عمودي vertical

c) (6 , 4) , (2 , 2)

بافتراض أن $(x_1 , y_1) = (2 , 2)$ وأن $(x_2 , y_2) = (6 , 4)$ فإن الميل هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

بصورة عامة يمكن أن يكون ميل المستقيم موجب positive أو سالب negative أو صفر zero وهي حالة أن لا يوجد ميل للمستقيم أو يمكن أن يكون الميل غير معرفاً undefined. وهذه الحالات موضحة بأشكالها في الجدول التالي:

Line	Slope	Example
1) Rising	Positive (m>0)	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$
2) Failing	Negative (m<0)	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$
3) Vertical	Not defined	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{0}$ undefined
4) Horizontal	Zero (m = 0)	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{zero}{\Delta x} = zero$

جدول رقم (1)

الحالات المختلفة لقيم الميل

4-6 صيغة الميل والنقطة Point – Slope Formula:

افرض أن المستقيم الذي ميله m يمر بنقطة ثابتة (x_1,y_1). ولو كانت النقطة (x,y) هي أي نقطة أخرى يمر خلالها هذا المستقيم. فإن الميل m هو:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ونستطيع أن نضع صيغة الميل m بضرب الوسطين والطرفين كما يلي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

وهذه الصيغة تسمى معادلة الميل والنقطة point-slope formula للخط المستقيم وهذه المعادلة مهمة جداً ونستطيع من خلالها إيجاد معادلة الخط المستقيم عن طريق معرفة ميل ذلك الخط وأي نقطة تقع على ذلك الخط المستقيم. وكذلك نستطيع من خلالها إيجاد معادلة الخط المستقيم المار بنقطتين. والمثال التالي يوضح هاتين الحالتين كالآتي:

مثال 7

أوجد معادلة الخط المستقيم Find the equation for the line:

a) passing through (-4,4) with slope $\frac{1}{4}$

يمر بالنقطة (4، −4) والميل $\frac{1}{4}$ واكتبها بالشكل النهائي:

$$AX + BY = C$$

باستخدام الصيغة $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

وبافتراض أن $(x_1 , y_1) = (-4,4)$ وأن $m = \frac{1}{4}$ لدينا:

$$y - 4 = \frac{1}{4}\,(x - (-4))$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}\,(x + 4)$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}\ x + \frac{4}{4}$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}\ x + 1$$

$$y - \frac{1}{4}\ x = 5$$

b) passing through the points (-3,3) and (-4,4)

لإيجـاد معادلـة الخط المار بالنقطتين $(x_1,y_1) = (-4,4)$ و $(x_2,y_2) = (-3,3)$ علينا أولاً إيجاد ميل المستقيم المار خلال النقطتين وهو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{-3-(-4)} = \frac{-1}{-3+4} = \frac{-1}{1} = -1$$

وباستخدام هذا الميل $m = -1$ وأي من النقطتين ولتكن $(x_1,y_1) = (-3,3)$ فإن معادلة الخط المستقيم ستكون:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 3 = 1\text{-}\ (x - (-3))$$

$$y - 3 = -(x + 3)$$

$$y - 3 = -x - 3$$

$$y = -x$$

4-7 المعادلات للخطوط أو المستقيمات الأفقية والعمودية:
Equations for Horizontal and vertical lines

وكمـا تم ذكره سابقاً فإن الخط الأفقي horizontal line هو الخط الذي يكتب بالشـكل $y = c$ والـذي يمـثل خطاً موازياً للإحداثي السيني x-axis عند القيمة c ويسـمى معامل تقاطع y-intercept y وهذه الخطوط بصورة عامة يكون ميلها m يساوي صفر، أي أن المعادلة هي $y = 0x + c$. أما الخط العمودي فهو الخط الذي يكتب بالشكل $x = c$ والذي يمثل خطاً موازياً للإحداثي الصادي y-axis عند القيمة c ويسـمى معامل تقاطع x-intercept x، وهذه الخطوط بصورة عامة عندما يكون

معامــل y يساوي صفرا، أي أن المعادلة هي $x + 0y = c$. والأمثلة التالية توضح معنى وأهمية مثل هذه الخطوط.

مثال 8

معادلة الخط المستقيم الأفقي Horizontal line والذي يمر بالنقطة (-3,4) هي $y = 4$ ومعادلــة الخط المستقيم العمودي vertical line والذي يمر بنفس النقطة هي $x = -3$.

مثال 9

إذا علمــت أن المعادلة الخطية هي $4y + 6x = 12$. أوجد الميل m ومعامل تقاطع y لرسم المعادلة.

Given the linear equation $4y + 6x = 12$. Find the slope and y-intercept of its graph.

لإيجـاد المـيل ومعامـل تقاطـع y يجب وضع المعادلة بالصيغة الخاصة $y = mx + b$ وبالتالي علينا حل المعادلة المعطاة لإيجاد y بدلالة x كالآتي:

$$4y + 6x = 12$$

$$4y = 12 - 6x$$

$$y = 3 - \frac{3}{2}x$$

وبالتالي فإن $m = -\frac{3}{2}$ وأن معامل تقاطع y هو $b = 3$.

4-8 الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة:
Parallel and perpendicular lines

في هذا المبحث سيتم ملاحظة الحالتين عندما يكون الخطان متوازيان أي لا يلتقـيا مهما امتدا أو أن يكون أحدهما عمودي على الآخر وكما هو موضح لاحقاً بالإنجليزي والعربي.

Let L_1 and L_2 be two given lines, where m_1 is the slope of L_1 and m_2 is the slope of L_2. Then, L_1 and L_2 are said to be parallel, written as

$L_1 \parallel L_2$, if and only if $m_1 = m_2$. On the other hand, L_1 and L_2 are said to be perpendicular, written as $L_1 \perp L_2$, if and only if $m_1m_2 = -1$ or $m_2 = \frac{-1}{m_1}$.

ويتضـــح مـــن ذلك أن معنى أن يكون الخطان المستقيمان متوازيان فهو أن يكـــون مـــيلهما متساوي ($m_1 = m_2$). أما أن يكون الخطان متعامدان فهو أن يكون حاصل ضرب ميلهما يساوي 1− ($m_1m_2 = -1$). وبالتالي نستطيع من خلال هاتين العلاقتـــين تحديـــد ميل أحد المستقيمات إذا علمنا أنه موازي أو متعامد مع مستقيم آخـــر معلـــوم الميل وغيرها من التطبيقات التي تعتمد على هذا المعنى وسيتم من خلال الأمثلة توضيح ذلك كالآتي:

مثال 10

لتكن $x - 2y = 4$ معادلة خط مستقيم. أوجد معادلة الخطان المستقيمان اللذان يمـــران بالـــنقطة (3,-3) ويكون أحدهما موازي والآخر متعامد مع الخط المستقيم المعلوم.

Given the equation line as $x - 2y = 4$. Find the equation of a line that passes through (3,-3) and is:

a) Parallel to the given line.

b) Perpendicular to the given line.

لإيجاد ميل الخط المستقيم المعلوم $x - 2y = 4$ علينا أولاً تحويله إلى الصيغة العامة $y = mx + b$ ونحصل على:

$$x - 2y = 4$$

$$-2y = 4 - x$$

$$y = -2 + \frac{1}{2}x$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

ويعني هذا أن ميل الخط المستقيم المعلوم $m = \frac{1}{2}$.

فإن كان هذا الخط موازياً للخط المستقيم المطلوب فإن ميل الخطان متساوي وبالتالي فإن ميل الخط المطلوب هو $m = \frac{1}{2}$ وبما أنه يمر بالنقطة (3,-3) لذلك فإن معادلة الخط المستقيم يمكن إيجادها كما يلي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{1}{2}\,(x - 3)$$

$$y + 3 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

وهي معادلة الخط المطلوب في الفرع (a) أعلاه.

وإن كان الخط متعامداً مع الخط المستقيم المطلوب فإن حاصل ضرب ميلهما هو -1 وبالتالي فإن ميل الخط المطلوب هو: $m_2 = \frac{1-}{m_1}$ أي أن:

$$M_2 = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

وبمـــا أن هذا الخط يمر بالنقطة (3,-3) لذلك فإن معادلة الخط المستقيم يمكن إيجادها كما يلي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -2\,(x - 3)$$

$$y + 3 = -2x + 6$$

$$y = -2x + 3$$

وهي معادلة الخط المطلوب في الفرع (b) أعلاه.

مثال 11

أوجد معادلات الخطوط المستقيمة التي تمر بالنقطة (2,3) وهي:

أ) موازي للمستقيم الخاص بالمعادلة $4x + 3y = 6$

ب) متعامد مع المستقيم الخاص بالمعادلة $x - 3y + 1 = 0$

Fine the equations of the lines passing through (2,3) that are:

a) parallel to the line $4x + 3y = 6$

b) perpendicular to the line $x - 3y + 1 = 0$

لحل الفرع (a) يجب علينا أولاً إيجاد ميل الخط المعلوم بعد تحويله إلى الصيغة العامة $y = mx + b$ كالآتي:

$$4x + 3y = 6$$

$$3y = 6 - 4x$$

$$y = 2 - \frac{4}{3}x$$

وبالتالي فإن $m = \frac{-4}{3}$ وإن كان هذا الخط موازياً للخط المطلوب فإن ميل الخط المطلوب هو أيضاً $m = \frac{-4}{3}$ والذي يمر بالنقطة (2,3) وبالتالي يمكن إيجاد معادلته كالآتي:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-4}{3} (x - 3)$$

$$y - 3 = \frac{-4}{3} x + 4$$

$$y = \frac{-4}{3} x + 7$$

وهي معادلة الخط المطلوب في الفرع (a) أعلاه.

أما لحل الفرع (b) فيجب علينا إيجاد ميل الخط المعلوم بعد تحويله للصيغة العامة $y = mx + b$ كالآتي:

$$x - 3y + 1 = 0$$

$$-3y = -x - 1$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

وبالتالي فإن $m = \frac{1}{3}$ وإن كان هذا الخط متعامداً مع الخط المطلوب فإن ميل الخــط المطلــوب $m_2 = \frac{-1}{1/3} = -3$ والذي يمر بالنقطة (2,3) وبالتالي فإن معادلته يمكن إيجادها كالآتي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -3(x - 2)$$

$$y - 3 = -3x + 6$$

$$y = -3x + 9$$

وهي معادلة الخط المستقيم للفرع (b) أعلاه.

مثال 12

حدد إن كانت أزواج المستقيمات التالية متوازية أم متعامدة أم غير ذلك:

Determine whether the following pairs of lines are parallel, perpendicular, or neither:

a) $2x + 3y = 6$ and $3x - 2y = 6$

b) $2y + 4x + 1 = 0$ and $y - 2 + 2x = 0$

لتحديد فيما إذا كان المستقيمان متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك علينا أولاً تحديد ميل كل منهما ثم تحديد الحالة المعينة. ولذلك فلدينا:

لإيجاد ميل المعادلة الأولى لدينا:

a) $2x + 3y = 6$

$$3y = 6 - 2x$$

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$\therefore\ m_1 = -\frac{2}{3}$$

ولإيجاد ميل المعادلة الثانية لدينا:

$$3x - 2y = 6$$

$$-2y = 6 - 3x$$

$$y = -3 + \frac{3}{2}x$$

$$\therefore\ m_2 = \frac{3}{2}$$

وعند مقارنة الميلين $m_2 = \frac{3}{2}$ and $m_1 = \frac{-2}{3}$، يتبين أنهما المقلوب السالب لكـلاً مـنهما، أي أن حاصل ضربهما هو -1 فهما -1 = m_1m_2 لذلك فإنها خطوط لمعادلات مستقيمة متعامدة فيما بينها.

The pair of lines are perpendicular

b) وباتباع نفس الأسلوب سنجد ميل كل من المعادلتين كالآتي

لإيجاد ميل المعادلة الأولى لدينا:

$$2y + 4x - 1 = 0$$

$$2y = -4x + 1$$

$$y = -2x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ m_1 = -2$$

لإيجاد ميل المعادلة الثانية لدينا:

$$y - 2 + 2x = 0$$

$$y = -2x + 2$$

$$\therefore\ m_2 = -2$$

وبمقارنـــة الميلـــين $m_1 = -2$ and $m_2 = -2$ ، يتبين أنهما متساويان، أي أن $m_1 = m_2$ لذلك فهما خطوط لمعادلات مستقيمة متوازية مع بعضها

The pair of lines are parallel.

4-9 تطبيقات رسم المعادلات الخطية:
Applications and Graphing Linear Equations

من خلال الوصف السابق لأنواع المعادلات الخطية والمعادلات الخاصة بها ومحاولـــة رســـم قسم منها نستطيع في هذا المبحث تلخيص جميع الأشكال ورسم المعادلات الخطية كالآتي:

Equations of straight line:

1) General formula $AX + BY + C = 0$
(A, B, C are constants, and A,B are both non zero)

2) Slope – Intercept formula $Y = mx + b$

3) Point – slope formula $y - y_1 = m(x - x_1)$

4) Horizontal $y = b$ $(m = 0)$

5) Vertical $x = a$ (m is undefined)

وجمـــيع هـــذه الأشكال يمكن رسمها عن طريق عمل جدول من القيم (x,y) حـــيث أنـــه وبافتـــراض قيم x نحصل على قيم y من التعويض في أي من أشكال المعـــادلات، كما ويمكن الاستعانة بالمساقط intercepts لتحديد نقطتين على أي من الأشـــكال ثم رسم الخط المستقيم الواصل بينها. والأمثلة التالية لتوضيح عملية رسم المعادلات الخطية كالآتي:

مثال 13

ارسم معادلة الخط المستقيم التالية:

Graph the following linear equation:

$$2x - 3y = 6$$

وكما تم وسبق ذكره يمكن الاستعانة بنقطتي المساقط intercepts إن وجدت ثـم رسم الخط المستقيم الواصل بينها. ويمكن أن نجد نقطة ثالثة للتأكد من صحة الحل. وهنا لدينا:

عندما $x = 0$ لدينا:

$$2x - 3y = 6$$

$$2(0) - 3y = 6$$

$$-3y = 6$$

$$y = -2$$

لذلك فإن النقطة الأولى $(x_1 , y_1) = (0 , -2)$

أما عندما $y = 0$ فلدينا:

$$2x - 3y = 6$$

$$2x - 3(0) = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

لذلك فإن النقطة الثانية $(x_2 , y_2) = (3 , 0)$

أما النقطة الثالثة فلتكن عندما $y = 2$ ولدينا:

$$2x - 3y = 6$$

$$2x - 3(2) = 6$$

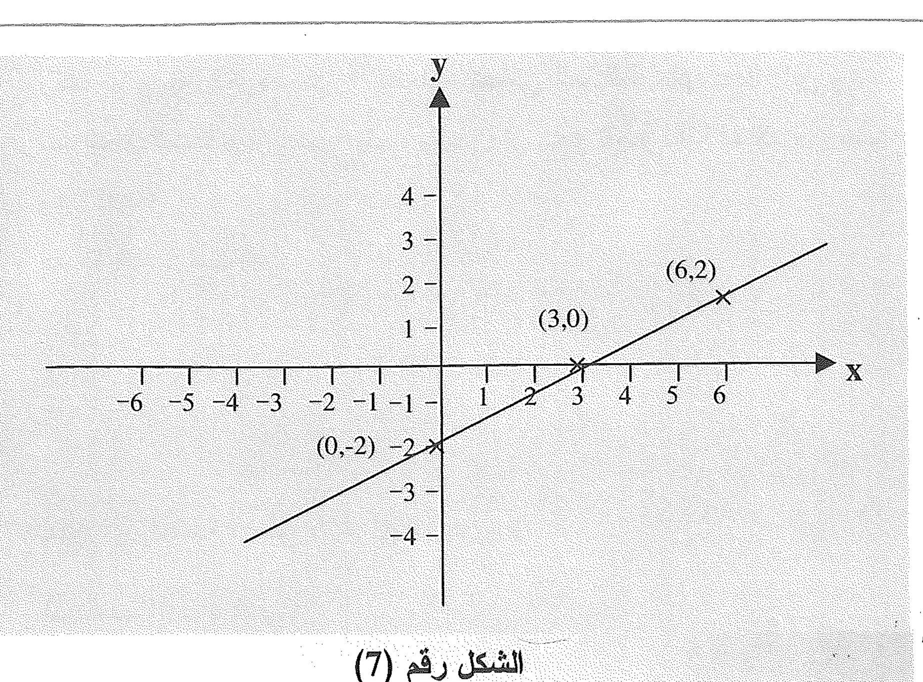
$$2x - 6 = 6$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

لذلك فإن النقطة الثانية $(x_2 , y_2) = (6 , 2)$

ولهذا سيكون رسم المعادلة كما في الشكل رقم (7) التالي:



الشكل رقم (7)

رسم المعادلة $2x - 3y = 6$

مثال 14

ارسم المعادلة الخطية التالية:

Graph the following equation:

$$4y + x - 8 = 0$$

وبنفس الأسلوب السابق يمكن إيجاد نقطتي المساقط كالآتي:

عندما $x = 0$ لدينا:

$4y - 8 = 0$

$y = 2$

أما عندما $y = 0$ فلدينا:

$x - 8 = 0$

$x = 8$

ولتكن $x = 4$ لدينا:

$4y + 4 - 8 = 0$

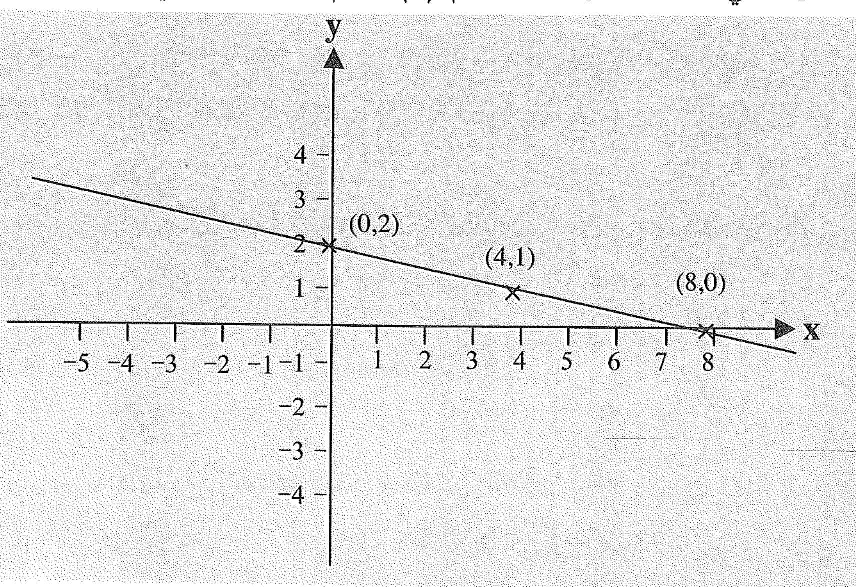
$$4y - 4 = 0$$

$$y = 1$$

لذلك فإن النقاط الثلاث بشكل جدول هي:

X	0	4	8
Y	2	1	0

وبالتالي نحصل على الشكل رقم (8) لرسم المعادلة كالآتي:



الشكل رقم (8)

رسم المعادلة $4y + x - 8 = 0$

أمـــا عـــن الأمـــثلة التطبيقية Applied examples للمعادلات الخطية وكيفية الـــتعامل معهـــا ورسمها فسيتم من خلال الأمثلة القادمة، حيث أن تطبيقات نموذج الكلفـــة الكلية Linear cost model سيظهر في المثال رقم (15) والمثال رقم (16) والمثال رقم (17)، أما علاقة العرض والطلب Supply and Demand فسيظهر في المثال رقم (18) كالآتي:

مثال 15

الكلفة الثابتة في اليوم الواحد هي 100$ والكلفة المتغير لعمل باوند واحد من الشاي هي أما أو 0.6$. حدد معادلة الكلفة وارسمها ثم أوجد كلفة عمل 500 باوند من الشاي في اليوم الواحد.

The fixed costs per day are $100, and the variable cost of processing 1 pound of tea is ar $0.6. Give the linear cost equation and graph it. Then, find the cost of processing 500 pounds of tea in one day.

لنفرض أن c تمثل الكلفة بالدولار لعمل x باوند من الشاي لليوم الواحد. لهذا فإن الكلفة الكلية Total cost تتمثل بالمعادلة الخطية التالية:

$$C = mx + b$$

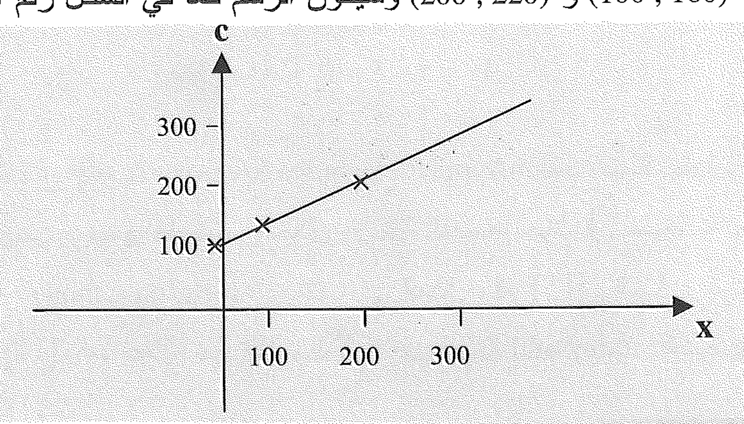
حيث أن: m يمثل الكلفة المتغيرة variable cost لكل وحدة (لكل بواند)

b تمثل الكلفة الثابتة fixed cost

ومن معديات هذا المثال لدينا العلاقة التالية:

$$C = 0.6\,x + 100$$

ولرسم هذه المعادلة يمكننا استخدام نقطتين كالآتي: لنفرض أن $x = 100$ فإن $c = 160$ ونفرض أن $x = 200$ فإن $c = 220$. وبالتالي فإن النقطتين هما: (100 , 160) و (200 , 220) وسيكون الرسم كما في الشكل رقم (9) التالي:



الشكل رقم (9)

رسم المعادلة للمثال رقم (15)

أما لإيجاد كلفة إنتاج 500 وحدة لدينا:

$$C = 0.6\,(500) + 100 = 400$$

أي أن إنتاج وتهيئة 500 باوند يكلف $400.

مثال 16

أوجـد معادلـة الكلفة C لنموذج العلاقة الخطية إذا كانت الكلفة الثابتة هي $400 لليوم الواحد وكلفة إنتاج 20 وحدة من المنتج هي $600.

Find an equation for C as a linear cost model of the fixed cost is $400 per day and it costs $600 to produce 20 units.

المعادلة الخطية للكلفة هي:

$$C = mx + b$$

وعند التعويض في هذه المعادلة بالقيمة التالية: $b=400$ ، $x= 20$ و $C= 600$ نحصل على:

$$600 = 20m + 400$$

$$200 = 20m$$

$$m = \frac{200}{20} = 10$$

والذي يمثل ميل slope للمعادلة الخطية المطلوبة. وبالتالي فإن معادلة الكلفة المطلوبة هي:

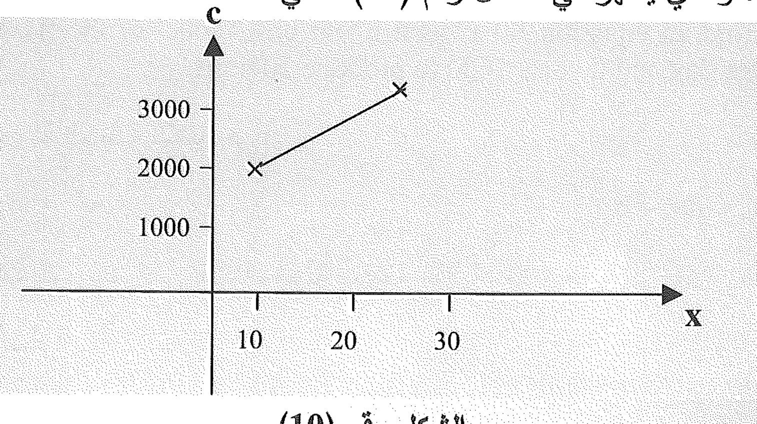
$$c = 10x + 400$$

مثال 17

كلفـة إنـتاج 10 حاسـبات فـي اليوم الواحد هي $2000 بينما الكلفة هي $3500 لإنـتاج 25 حاسبة في اليوم الواحد. افترض الموديل الخطي للكلفة، حدد العلاقة التي تمثل معادلة الكلفة c لإنتاج x حاسبة في اليوم الواحد وارسم المعادلة.

The cost of manufacturing 10 computers per day is $2000, while it costs $3500 to produce 25 computers per day. Assuming a linear cost model determine the relationship representing the total cost c of producing x computers per day and graph the equation.

من المعلومات المتوفرة في هذا التطبيق لدينا نقطتين تمثلان العلاقة بين عدد الـــوحدات المنـــتجة x وكلفة الإنتاج y هما (10,2000) و (25,3500). وعند رسم هاتـــين النقطتـــين وإيصالهما بالخط المستقيم فهو يمثل الرسم بالنسبة لمعادلة الكلفة الخطية c والذي يظهر في الشكل رقم (10) التالي:



الشكل رقم (10)

رسم العلاقة في المثال رقم (17)

أما الميل m للخط المستقيم الذي يربط بين هاتين النقطتين هو:

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3500 - 2000}{25 - 10} = \frac{1500}{15} = 100$$

وباســتخدام صيغة النقطة والميل فإن المعادلة الخطية للكلفة المطلوبة للخط المستقيم Linear cost model والذي ميله $m = 100$ ويمل بالنقطة (10,2000) هي:

$C - C_1 = m\,(x - x_1)$

$c - 2000 = 100\,(x - 10)$

$c = 100x + 1000$

وهي معادلة العلاقة المطلوبة.

مثال 18

تاجر للسيارات يستطيع أن يبيع 10 سيارات في اليوم الواحد بسعر $5000 للسيارة الواحدة ولكنه يستطيع أن يبيع 15 سيارة في اليوم إذا كان السعر $4500 للسيارة الواحدة. حدد معادلة الطلب وافترض أنها معادلة خطية.

A car dealer can sell 10 cars per day at $5000 per car, but he can sell 15 cars if the price is $4500 per car. Determine the demand equation, assuming it is linear.

نفتـــرض أن x يمـــثل كمية الطلب demand quantity والذي يمثل المحور الأفقي x-axis أما السعر p للوحدة price per unit فيمثل المحور العمودي y-axis وبالتالـــي فـــإن النقطتـــين علـــى منحنى الطلب demand curve هما (10,5000) و (15,4500).

وبمـــا أن معادلة الطلب هي معادلة خطية demand equation is liner فإن هـــذه المعادلة هي معادلة خط مستقيم يمر بالنقطتين أعلاه. لذلك فإن الميل m لهذه المعادلة هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4500 - 5000}{15 - 10} = \frac{-500}{5} = -100$$

وباستخدام صيغة الميل m = -100 والنقطة (10,5000) نستطيع إيجاد العلاقة الخطية كالآتي:

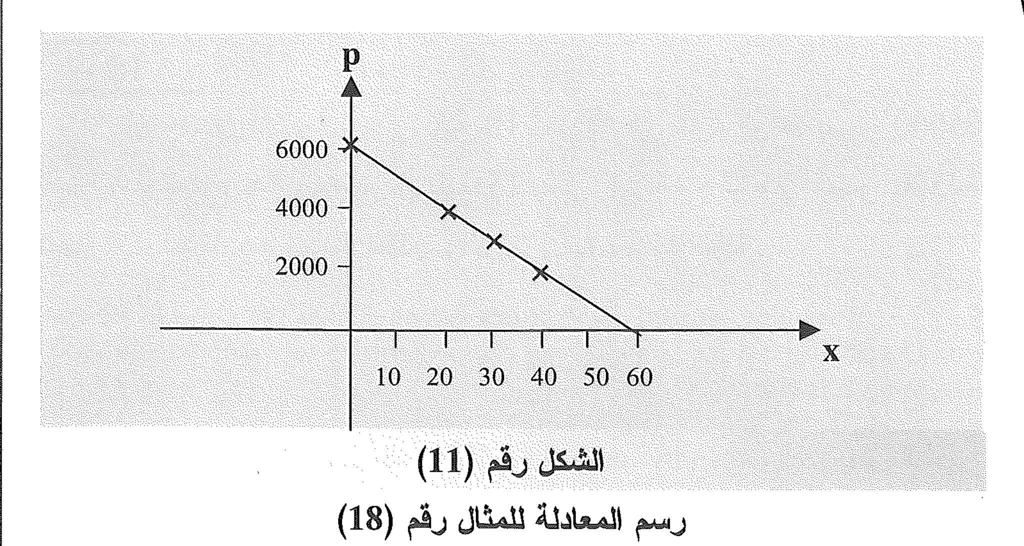
$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$p - 5000 = -100\,(x - 10)$$

$$p - 5000 = -100x + 1000$$

$$p = -100x + 6000$$

وهي معادلة الطلبة المطلوبة والشكل رقم (11) يمثل رسم المعادلة:



الشكل رقم (11)

رسم المعادلة للمثال رقم (18)

4-10 أنظمة المعادلات الخطية لمتغيرين:
Systems of Linear Equations in two variables

لقد تم تعريف المعادلة الخطية Linear equation وكذلك تم التعرف على كيفية حلها للحصول على قيمة المتغير فيها. وسيتم هنا تعريف نظام من المعادلات الخطية عندما تكون لدينا أكثر من معادلة خطية ولنفس المتغيرات ويراد منها الحصول على قيم المتغيرات فيها.

النظام الذي يحتوي على معادلتين خطيتين وبمتغيرين هو النظام الذي له الشكل العام التالي:

$$A_1X + B_1Y = C_1$$
$$A_2X + B_2Y = C_2$$

حيث أن A_1,A_2 و B_1,B_2 و C_1,C_2 جميعها ثوابت حقيقية ويسمى System of two equations and two variables

وهناك العديد من المشاكل في الاقتصاد والمالية والإدارة Business and Economics تقود إلى ما يعرف بأنظمة المعادلات الخطية Systems of linear equations والمطلوب هو حل هذه الأنظمة والتوصل إلى النتائج.

أما عن طرق حل أنظمة المعادلات الخطية بمتغيرين فهي:

1) Graph Method. طريقة الرسم

2) Elimination by Addition. طريقة الحذف

3) Substitution. طريقة التعويض

وسيتم التعرف على هذه الطرق المختلفة وكيفية استخدامها لحل الأمثلة التطبيقية كالآتي:

مثال 19

إذا كانت كلفة 2 قميص للكبار وقميص واحد للأطفال هي 9$. وكانت كلفة قميص واحد للكبار وثلاث قمصان للأطفال هي 12$. ما هو سعر كل قميص.

Suppose that the cost of two adult shirts and one child shirt is $9 and if one adult shirt and three child shirt cost $12. What is the price for each.

لنفرض أن x يمثل سعر القميص للكبار

وأن y يمثل سعر القميص للصغار

وبالتالي فإن:

$2x + y = 9 \qquad \ldots (1)$

$x + 3y = 12 \qquad \ldots (2)$

وهاتان المعادلتان تكونان نظاماً من معادلتين خطيتين ومتغيرتين (مجهولين) هما x و y

System of two equations and two variables

ولأجل حل هذا النظام لدينا:

a) Graph Method:

نقوم برسم المعادلتين في مكان واحد والنقطة التي يتقاطع فيها الخطان المستقيمان للمعادلتين هو حل هاتين المعادلتين، بمعنى أنه حل للنظام.

وكما تم رسم المعادلة الخطية سابقاً سنقوم برسم هاتين المعادلتين بعد عمل جدول بقيم كل منها كالآتي:

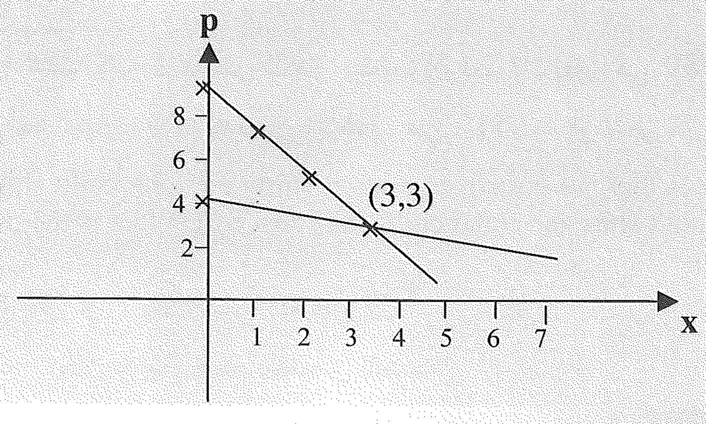
المعادلة (1) $2x + y = 9$

X:	0	1	2	3
Y:	9	7	5	3

المعادلة (2) $x + 3y = 12$

X:	0	3	6
Y:	4	3	2

ورسم المعادلتين يظهر في الشكل رقم (12) التالية:



الشكل رقم (12)

رسم المعادلتين في المثال رقم (19)

ويلاحـــظ مـــن الشـــكل أعلاه أن نقطة التقاطع هي (3,3) وبالتالي فإن سعر قميص الكبار 3$ وسعر قميص الأطفال هو 3$.

b) Elimination by Addition:

والآن ســـنقوم بحل نفس المثال باستخدام الطريقة الثانية وهي طريقة الحذف بالإضافة وسيتم عرضها كالآتي:

إذا ضربنا المعادلة (1) في (3−) وجمعنا المعادلتين نستطيع حذف y

وإذا ضربنا المعادلة (2) في (2−) وجمعنا المعادلتين نستطيع حذف x

$$2x + y = 9 \qquad \ldots (1)$$
$$-2x - 6y = -24 \qquad \ldots (2)$$

جمع المعادلتين وحذف x

$$-5y = 15$$
$$y = 3$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة (1) لإيجاد قيمة x كما يلي:

$$2x + 3 = 9$$
$$2x = 9$$
$$x = 3$$

وبالتالي فإن قيمة x هي 3 وقيمة y هي 3. وذلك يعني أن سعر قميص الكبار 3$ وسعر قميص الأطفال هو 3$.

وهذه النتيجة متفقة تماماً مع الطريقة الأولى.

c) Substitution:

والآن سيتم حل نفس المثال بالطريقة الثالثة وهي طريقة التعويض باستخدام المعادلة (1) نجد قيمة y بدلالة x كالآتي:

$$y = 9 - 2x \qquad \ldots (3)$$

ثم يتم تعويض ذلك في المعادلة (2) ليصبح لدينا:

$$x + 3(9 - 2x) = 12$$
$$x + 27 - 6x = 12$$
$$-5x = -15$$
$$x = 3$$

وأخيراً نعوض عن قيمة x بالمقدار 3 في المعادلة (3) لنجد أن:

$$y = 9 - 2(3)$$
$$y = 3$$

وهذا يعني أن سعر قميص الكبار 3$ وسعر قميص الأطفال هو 3$. وهذه النتيجة متفقة تماماً مع الطريقتين السابقتين.

مثال 20

أحـــد أصـــحاب معـــارض السيارات رغب بتوسيع عمله لشراء نوعين من السـيارات الحديثة أحدهما صغيرة الحجم وكل سيارة تكلف 3000$ والنوع الثاني كبيرة الحجم وكل سيارة تكلف 4000$. السيارة من النوع الصغير تستغل مساحة مـن المعـرض مقداره 40 قدم مربع أما السيارة من النوع الكبير فتستغل مساحة مقـدارها 50 قدم مربع من المعرض. فإذا كان المالك يملك فقط 200000$ لهذه الصفقة ولديه مساحة مقدارها 2600 قدم مربع في المعرض الخاص بالسيارات. ما هي العدد المطلوب شراءه من كل نوع لاستخدام المبالغ والمساحة المتوفران أفضل استغلال.

A car dealar wants to expand his business by buying and displaying two types of cars, that have recently appeared on the market. Each car of the first type costs $3000 and each car of the second type costs $4000. Each car of the first type occupies 40 square feet of floor space, where as each car of the second type occupies 50 square feet of the floor space. How many cars of each type should he bought and displayed to make fullure of the available $200000 for capital and 2600 square feet for space.

افترض أن المالك اشترى x سيارة صغيرة و y سيارة كبيرة

فإن المعادلة الأولى والتي تمثل الكلفة هي:

$$3000x + 4000y = 200000$$

أما المعادلة الثانية والتي تمثل المساحة فهي:

$$40x + 50y = 2600$$

وبذلك فإن النظام هو:

$$3000x + 4000y = 200000 \quad \dots (1)$$

$$40x + 50y = 2600 \quad \dots (2)$$

وللحـــل بطريقة الحذف بالإضافة elimination by addition سنقوم بضرب المعادلة (2) في (−80) للحصول على:

$$3000x + 4000y = 200000$$
$$-3200x - 4000y = -208000$$

جمع المعادلتين

$$-200x = -8000$$
$$X = 40$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على:

$$40(40) + 50y = 2600$$
$$1600 + 50y = 2600$$
$$50y = 1000$$
$$y = 20$$

وبعني ذلك أن العدد المطلوب من السيارات ذات الحجم الصغير هو 40 وذات الحجم الكبير هو 20 سيارة.

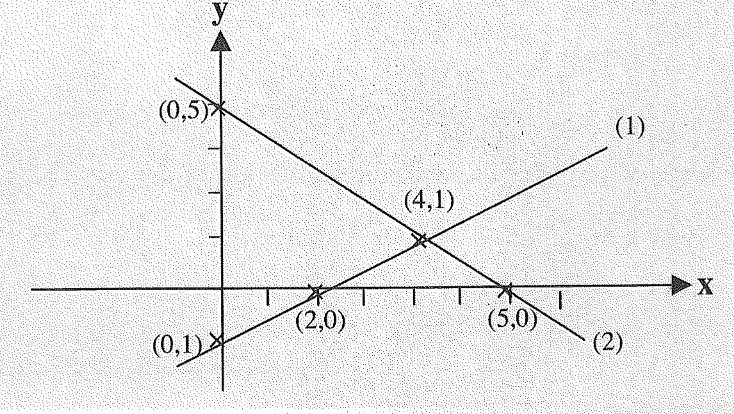
مثال 21

حل كلاً من أنظمة المعادلات التالية بالطرق الثلاث:

a) $x - 2y = 2$ … (1)

$x + y = 5$ … (2)

الحل بالرسم وبالرجوع إلى الشكل رقم (13) التالي:



الشكل رقم (13)

رسم مثال (21) الفرع (a)

فإن الحل هو $x = 4$ و $y = 1$

الحل بالحذف:

$x - 2y = 2 \quad \ldots (1)$

$x + y = 5 \quad \ldots (2)$

نضرب المعادلة (1) في (−1) لنحصل على:

$x - 2y = -2$

$x + y = 5$

جمع المعادلتين

$3y = 3$

$y = 1$

نعوض عن قيمة y في المعادلة (2) لنحصل على:

$x + 1 = 5$

$x = 4$

أما عن الحل بالتعويض فلدينا من المعادلة (2) $x = 5 - y$

ونعوض عن ذلك في المعادلة (1) لنحصل على:

$(5 - y) - 2y = 2$

$5 - y - 2y = 2$

$-3y = -3$

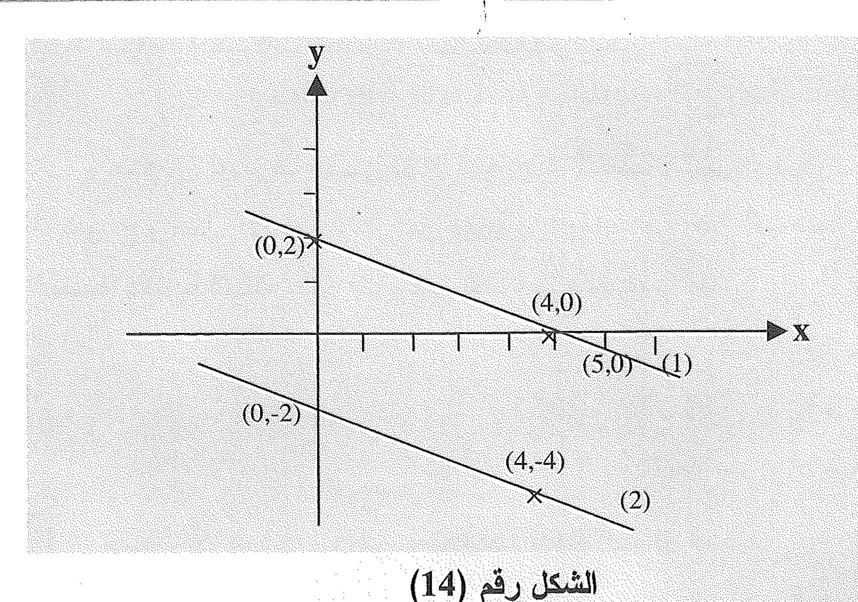
$y = 1$

ويلاحظ بأن الطرق الثلاث تتفق في النتيجة والحل وهو $x = 4$ و $y = 1$

b) $x + 2y = -4 \quad \ldots (1)$

$2x + 4y = 8 \quad \ldots (2)$

الحل بالرسم يتم في الشكل رقم (14) التالي:



الشكل رقم (14)

رسم المثال (21) الفرع (b)

وبمـــا أن الخطين متوازيين parallel lines فلا توجد نقاط تقاطع ويعني ذلك عدم وجود حل للمعادلتين.

أما عن حل النظام نفسه بطريقة الحذف لدينا:

$$x + 2y = 4 \quad \dots (1)$$
$$2x + 4y = 8 \quad \dots (2)$$

جمع المعادلتين

$$-2x - 4y = 8$$
$$2x + 4y = 8$$

$$\text{zero} = \text{zero}$$

لا يوجد حل لهاتين المعادلتين أو لهذا النظام.

4-11 أنظمة المعادلات الخطية لثلاث متغيرات:
Systems of linear equations in three variables

بعـــد أن تعـــرفنا علـــى نظام المعادلات الخطية لمتغيرين يمكن تعميم كتابة الـــنموذج وحـــل الأنظمة لأكثر من متغيرين. وسيتم في هذا المبحث الحديث عن الأنظمة الخطية لثلاث متغيرات والتي تكتب بالشكل العام العالي:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3$$

حـــيث أن x , y , z هي المتغيرات variables أو المجاهيل unknown وأن a_1 , a_2 , a_3 وكـــذلك b_1 , b_2 , b_3 وأيضـــاً c_1 , c_2 , c_3 و k_1 , k_2 , k_3 جميعها ثوابت حقيقية Real constants.

أمـــا عـــن حل هذه الأنظمة فيتم باتباع طريقة الحذف Elimination السابق تطبيقها مع تعديل معين للتعامل مع المعادلات الثلاث كالآتي:

1) نخـــتار أي معادلتـــين مـــن النظام ونقوم بحذف أحد المتغيرات الثلاث بواســـطة الحذف Elimination والنتيجة تعطي معادلة واحدة لمتغيرين two variables.
2) نخـــتار أي معادلتين أخرى لنقوم بحذف نفس المتغير الذي تم حذفه في الخطوة رقم (1) لإيجاد معادلة ثانية لنفس المتغيرين السابقين.
3) نستخدم المعادلتين الناتجتين من الخطوتين (1) و(2) أعلاه لتكوين نظام من المعادلات الخطية بمتغيرين System of two Variables ونقوم بحل هـــذا النظام باتباع الطرق السابق ذكرها في المبحث السابق لإيجاد قيم المتغيرين المجهولين.
4) نعوض في أي من المعادلات الأصلية للنظام من الثلاث معادلات عن قيم المتغيـــرين اللـــذين تم حلهما في الخطوة رقم (3) لإيجاد المتغير الثالث

والــذي تــم حذفــه سابقا. وبالتالي يصبح لدينا حل للنظام و المعادلات الثلاث.

ولتطبيق الخطوات السابقة يمكن اتباع خطوات حل الأمثلة التالية:

مثال 22

حل المعادلات التالية Solve the following Equations:

$$3x - 2y + 4z = 6 \quad \dots (1)$$

$$2x + 3y - 5z = -8 \quad \dots (2)$$

$$5x - 4y + 3z = 7 \quad \dots (3)$$

يلاحــظ هنا أنه تم ترقيم المعادلات وذلك لأن اتباع خطوات حل هذا النظام يكون أسهلاً وأوضح عند ذكر رقم المعادلة التي يراد التعامل معها.

وباختيار حذف المتغير y، وذلك لأن معاملاته 2−، 3+، 4− في المعادلات الثلاث أبسط في التعامل من معاملات المتغيران الآخران x أو z.

باســتخدام المعادلتــين (1) و(2) وبضرب المعادلة رقم (1) في 3 وضرب المعادلة رقم (2) في 2 نحصل على ما يلي:

$$9x - 6y + 12z = 18$$

$$4x + 6y - 10z = -16$$

وبجمع المعادلتين

$$13x + 2z = 2 \quad \dots (4)$$

وهنا قمنا بترقيم المعادلة الأخيرة بالمعادلة رقم (4)

وباســتخدام المعادلتــين (1) و(3) وبضــرب المعادلة رقم (1) في 2− أما المعادلة رقم (3) فتبقى على حالها نحصل على ما يلي:

$$-6x + 4y - 8z = -12$$

$$5x - 4y + 3z = 7$$

وبجمع المعادلتين

$$-x - 5z = -5 \quad \dots (5)$$

وهنا قمنا بترقيم المعادلة الأخيرة بالمعادلة رقم (5).

أمـــا الآن فسنضع المعادلتين (4) و(5) مع بعضهما ليكونا نظاماً خطياً من متغيرين كالآتي:

$$13x + 2z = 2 \qquad \ldots (4)$$

$$-x - 5z = -5 \qquad \ldots (5)$$

ونخـــتار الآن حـــذف أحـــد المتغيرين x أو z بملاحظة معاملات كل منهم وباتباع نفس الخطوات السابق ذكرها لحل الأمثلة في المبحث السابق.

وبضـــرب المعادلة رقم (5) في 13 وإضافتها للمعادلة رقم (4) نقوم بحذف المتغير x والحصول على ما يلي:

$$13x + 2z = 2$$

$$-13x - 65z = -65$$

وبجمع المعادلتين

$$-63z = -63$$

$$z = 1$$

والآن نقـــوم بالتعويض عن z بالقيمة (1) في أي من المعادلتين (4) أو (5) لإيجاد قيمة المتغير x. وباستخدام المعادلة رقم (5) نحصل على:

$$-x - 5z = -5$$

$$-x - 5(1) = -5$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

وأخيـــراً نقـــوم بالـــتعويض عن z بالقيمة (1) وعن x بالقيمة (0) بأي من المعـــادلات (1)، (2) أو (3) لإيجـــاد قـــيمة المتغيـــر الثالث والأخير y كالآتي. وباستخدام المعادلة رقم (1) نحصل على:

$$3x - 2y + 4z = 5$$

$$3(0) - 2y + 4(1) = 6$$

$$-2y = 2$$

$$y = -1$$

وبالتالي فإن حل النظام المطلوب من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات هو:

$x = 0$, $y = -1$, and $z = 1$

وللـــتأكد من صحة الحل نستطيع التعويض عن قيم المتغيرات في المعادلات الثلاث للحصول على ما يلي:

$$3x - 2y + 4z = 6$$

$$3(0) - 2(-1) + 4(1) = 6$$

$$2 + 4 = 6$$

$$6 = 6$$

وذلك يعني أن قيم المتغيرات تحقق المعادلة رقم (1)

$$2x - 3y - 5z = -8$$

$$2(0)\ 3(-1) - 5(1) = -8$$

$$-3 - 5 = -8$$

$$-8 = -8$$

وذلك يعني أن قيم المتغيرات تحقق المعادلة رقم (2)

$$5x - 4y + 3z = 7$$

$$5(0) - 4(-1) + 3(1) = 7$$

$$4 + 3 = 7$$

$$7 = 7$$

وبمـــا أن قـــيم المتغيـــرات تحقق المعادلات الثلاث فإن ذلك يعني أن الحل صحيح وهو:

$x = 0$, $y = -1$, $z = 1$

مثال 23

حل نظام المعادلات الخطية التالية:

Solve the following system of linear equations:

$$x + 3y - z = 4 \quad \dots (1)$$

$$2x + y + 2z = 10 \quad \dots (2)$$

$$3x - y + z = 4 \quad \dots (3)$$

وباتباع نفس الخطوات السابق ذكرها سيكون الحل كالآتي:

وباختيار المعادلتين (1) و(2) بعد ضرب المعادلة رقم (1) بالقيمة 2− وجمعها مع المعادلة رقم (2) نحصل على:

باستخدام المعادلتين (1) و(2) وبضرب المعادلة رقم (1) في 3 وضرب المعادلة رقم (2) في 2 نحصل على ما يلي:

$$-2x - 6y + 2z = -8$$

$$2x + y + 2z = 10$$

وبجمع المعادلتين

$$-5y + 4z = 2 \quad \dots (4)$$

وباختيار المعادلتين (1) و(3) بعد ضرب المعادلة رقم (1) بالقيمة 3− وجمعها مع المعادلة رقم (3) نحصل على:

$$-3x + 9y + 3z = -12$$

$$3x - y + z = 4$$

وبجمع المعادلتين

$$-10y + 4z = -8 \quad \dots (5)$$

نحصل على نظام من المعادلتين (4) و(5) وبمتغيرين y و z كالآتي:

$$-5y + 4z = 2 \quad \dots (4)$$

$$-10y + 4z = -8 \quad \dots (5)$$

وبضرب المعادلة رقم (4) في 2− وجمعها مع المعادلة رقم (5) نحصل على:

وبجمع المعادلتين

$$\begin{aligned} 10y - 8z &= -4 \\ -10y + 4z &= -8 \\ \hline -4z &= -12 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

وبالتعويض في المعادلة رقم (4) نحصل على:

$$-5y + 4\,z = 2$$
$$-5y + 5\,(3) = 2$$
$$-5y = -10$$
$$y = 2$$

وأخيراً بالتعويض في المعادلة رقم (1) نحصل على:

$$x + 3y - z = 4$$
$$x + 3\,(2) - 3 = 6$$
$$x + 3 = 4$$
$$x = 1$$

وبذلك فإن حل النظام هو:

$x = 1$, $y = 2$, and $z = 3$

وللتأكد من صحة الحل نعوض في المعادلات الأصلية ويكفي بالتعويض في أحدهما ولتكن المعادلة رقم (2):

$$2x + y + 2z = 10$$
$$2\,(1) + 2 + 2\,(3) = 10$$
$$2 + 2 + 6 = 10$$
$$10 = 10$$

وبالتالي فإن الحل صحيح.

وكــذلك غالــباً مــا نســتخدم طــريقة التعويض Substitution لحل أنظمة المعادلات لثلاث متغيرات وكما في الأمثلة التالية:

The method of substitution can also often be used to solve systems of equations with three or more variables, as in there two examples

مثال 24

حل نظام المعادلات التالية:

Solve the following system of linear equations:

$X_1 - X_2 - X_3 = 1$ ... (1)

$-4X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6$ ... (2)

$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 6$ ... (3)

لحل هذا النظام بطريقة التعويض لدينا ما يلي:

نوجد قيمة X_1 كما في المعادلة (4) باستخدام المعادلة (1) كالآتي:

$X_1 = (X_2 + X_3 + 1)$ ... (4)

نعوض الآن بما يساوي X_1 في المعادلتين (2) و(3).

Now we substitute this expression for X into the remaining two equations.

$-4(X_2 + X_3 + 1) - 2X_2 + 3X_3 = 6$

$2(X_2 + X_3 + 1) + X_2 + 3X_3 = 6$

الآن نقوم بتبسيط المعادلتين لإيجاد قيم X_2 و X_3 وكما يلي:

$-4X_2 - 4X_3 - 4 - 2X_2 + 3X_3 = 6$

$-6X_2 - X_3 = 10$ ... (5)

$2X_2 + 2X_3 + 2 + X_2 + 3X_3 = 6$

$3X_2 + 5X_3 = 4$ ... (6)

الآن نحل المعادلتين (5) و(6) كالآتي:

$-6X_2 - X_3 = 10$ ... (5)

$2(3X_2 + 5X_3 = 4)$ ... (6)

$-6X_2 - X_3 = 10$ ... (5)

$6X_2 + 10X_3 = 8$ ... (6)

$9X_3 = 18$

$X_3 = 2$

الآن نعوض في المعادلة (5) قيمة X_3 لنحصل على:

$-6X_2 - 2 = 10$

$-6X_2 = 12$

$X_2 = -2$

الآن نعوض في المعادلة (4) لإيجاد قيمة X_1:

$X_1 = (-2 + 2 + 1)$

$X_1 = 1$

وللتحقيق من نتيجة الحل نعوض في المعادلة (1):

$X_1 - X_2 - X_3 = 1$

$1 + 2 - 2 \quad = 1$

الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن.

مثال 25

حل نظام المعادلات التالية:

Solve the following system of equations:

$X_1 + X_2 + X_3 = 6$ ... (1)

$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 9$ ... (2)

$-X_1 + 2X_2 + X_3 = 6$ ... (3)

للحل أولاً نجد قيمة X_1 وكما في المعادلة (4) باستخدام المعادلة (1) لنحصل على:

$X_1 = (6 - X_2 - X_3)$ ... (4)

بالقسمة لطرفي المعادلة على (3-) نحصل على:

$X_3 = 1$

نعوض في المعادلة (1) عن قيمة X_3:

$X_2 - 4\ (1) = -6$

$X_2 = -2$

الآن نعوض عن X_3 و X_2 في معادلة (4) لإيجاد قيمة X_1:

$X_1 = (1 - 3\ (-2) - 4\ (1))$

$X_1 = 1 + 6 - 4$

$X_1 = 3$

$X_1 = 3 \quad , \quad X_2 = -2 \quad , \quad X_3 = 1$

الآن للتأكد من الحل نعوض في إحدى المعادلات الثلاث وكما يلي:

$3X_1 + 10X_2 + 8X_3 = -3$

$3\ (3) + 10\ (-2) + 8\ (1) = -3$

$9 - 20 + 8 = -3$

$-3 = -3$

إذن الحل صحيح الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن.

أسئلة الفصل الرابع
Exercises for chapter four

أوجد الميل لكلاً من المستقيمات التي تربط أزواج النقاط التالية للأسئلة (1-4):

Find the slope of each line joining each pair of points:

1) (4 , 6) and (1 , 2)

2) (4 , -3) and (1 , -5)

3) (3 , 0) and (5 , 0)

4) (-4 , 1) and (-4 , 3)

أوجد معادلة الخط المستقيم لكل مما يلي للأسئلة (5-19):

Find the equation of the line for the following:

5) passing through (3 , 2) with slope 4.

6) passing through (2 , -3) with slope -4.

7) passing through (5 , 6) with zero slope.

8) passing through (4 , -2) and (5 , 6).

9) passing through (3 , 2) and (4 , 5).

10) passing through (4 , -3) and (5 , 9).

11) passing through (4 , -3) with no slope.

12) with y-intercept –6 and slope $\frac{1}{4}$.

13) with y-intercept 3 and slope $-\frac{1}{2}$.

14) with y-intercept –4 and slope 4.

15) passing through (3 , -1) and parallel to the line 6x + 2y + 4.

16) passing through (-2 , 0) and parallel to the line passing through (3 , 4) and (2 , 1).

17) passing through (3 , -4) and parallel to the line $4Y + 3 = 0$.

18) passing through (3 , -2) and perpendicular to the line $4x + 2y - 4 = 0$.

19) passing through (4 , 3) and perpendicular to the line passing through (1 , 2) and (3 , 2).

أوجد معامل التقاطع للمتغير y للمعادلات الخطية التالية للأسئلة (20-24):

Find the slope and the y-intercept for each of the following linear relations:

20) $4y - 6x = 12$

21) $5x + 4y = 18$

22) $4x + 8 = 0$

23) $5y - 7 = 0$

24) $\frac{y}{6} + \frac{x}{8} = 2$

حدد فيما إذا كانت أزواج الخطوط المستقيمة التالية هي خطية متوازية أو متعامدة أو غير ذلك للأسئلة (25-30):

Determine whether the following pair of equations having parallel or perpendicular lines or not:

25) $4x - 6y = 12$ and $6x + 4y = 12$

26) $2x = 2y$ and $2x + 2y = 4$

27) $4x = -y - 6$ and $y = -2x - 4$

28) $x = -4 - 6y$ and $4y + 6x = 10$

29) $x - 3 = 0$ and $4 - x = 0$

30) $6x + 8y = 2$ and $6x - 8y = 2$

حل الأسئلة التطبيقية التالية (31-32):

Solve the following applications:

31) (Linear cost Model) The total cost of manufacturing 50 computers per week is \$10000 and the total cost for 100 computers per week is \$15000:

a) Determine the cost equation, assuming it to be linear.

b) What are the fixed cost and the variable cost per unit.

c) What is the cost of producing 200 computers per.

32) (Demand Relation) A car manufacturer finds that at \$6000 per car, sales are 5000 cars per month. And at \$5000 per car, sales are 6000 cars per month. Determine the demand equation, assuming it to be linear.

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية للأسئلة (33-50):

Solve the following systems of linear equations:

34) $2y - 4x = 1$ and $5y - 10x = \frac{5}{2}$

35) $y - 2x = 1$ and $2y - 4x = -3$

36) $3x - 6y = -2$ and $-4y + 8x = -1$

37) $-10y + 2x = 8$ and $20y - 4x = -16$

38) $2y + 2x = 10$ and $2y - 2x = 2$

39) $3y - x = 2$ and $y + 2x = 10$

40) $4y + 3x = 26$ and $3y - 11x = -7$

41) $3y - 6x = -9$ and $-2y + 4x = 12$

42) $2x_1 - x_2 - x_3 = 5$ and $x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$
and $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3$

43) $5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2$ and $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 19$
and $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -15$

44) $2x_1 - 11x_2 - 3x_3 = 2$ and $x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$
and $x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -1$

45) $6x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -17$ and $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -5$
and $3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -8$

46) $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$ and $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7$
and $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$

47) $x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$ and $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$
and $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$

48) $2x_1 - x_2 + 5x_3 = -3$ and $-x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1$
and $x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$

49) $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -9$ and $x_1 - 3x_3 = -6$
and $2x_1 + x_3 = -5$

50) $x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$ and $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$
and $x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$

الفصل الخامس

5 الدوال والرسوم

ومن أمثلة ذلك:

- أن مساحة الدائرة تعتمد على نصف قطرها.
- التكاليف الشهرية لمنتج معين يعتمد على عدد القطع المنتجة.
- الأرباح التي تحققها شركة معينة تعتمد على المبيعات لتلك الشركة.

وغيرها من العديد من الأمثلة التطبيقية والتي سنتناول العديد منها ضمن متن هذا الفصل وحسب المفاهيم التي سيتم دراستها.

وعــندما تكون هناك علاقة ولتكن f تربط عناصر مجموعة مثل A بعناصر مجمــوعة أخــرى مثل B عندئذٍ تسمى العلاقة f اقتراناً أو دالة function. وبذلك يمكن تعريف الدالة كالآتي:

Function:

Let A and B are two nonempty sets. Then, a function, say f, from A to B is a rule that assigns to each element in A a unique element in B.

وتستخدم عادة الرموز f, g , F, or G للدالة.

Let f denote a given function, The set A for which f assigns a unique value in B is called the Domain of the function f, The corresponding set of values in B is called the range of the function.

إذا كانت العلاقة f تربط كل عنصر من A بعنصر وحيد من B عندئذٍ نسمي المجمــوعة A بمــنطلق الدالة Domain ونسمي المجموعة الثانية B بالمدى للدالة Range، ويرمز للدوال عادة بالرمز $y = f. (x)$، حيث يقال عن المتغير X بالمتغير المستقل Independent variable ويقال عن المتغير Y بالمتغير التابع Dependent variable وأن لكل قيمة من قيم المتغير X هناك قيمة مقابلة للمتغير Y وبذلك فإن المــنطلق Domain هــو المجموعة التي تمثل المتغير المستقل X، أما مدى الدالة Range فهو المجموعة التي تمثل قيم المتغير التابع Y بعد التعويض في الدالة عن قيم المتغير X.

If for each x their exists exactly one value of y, we say that y is a function of x, and we write $y = f (x)$.

for example y – 4x + 1, then for each value of x in the real line there is a value for y which is also must be in the real line.

We usually write $f(x) = x^2$ to define a function that associates the x^2 value with the number x.

Thus,

$f(3) = 3^2 = 9$, so f associate 9 with 3

$f(-2) = (-2)^2 = 4$, so f associate 4 with -2

$f(0) = 0^2 = 0$, so f associate 0 with 0

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, so f associate 2 with $\sqrt{2}$

This formula does not involve a dependent variable.

في كثير من الأحيان، المتغير المستقل x للدالة f (x) لا يكون حراً في قيمه. بمعنى آخر، هناك بعض القيود على تلك القيم وبذلك علينا تعريف وتفسير ما يعرف بالمنطلق للدالة Domain of a function كالآتي:

Domain:

If the function f and y = f (x), then the domain of f can be viewed as the set of allowable values for the independent variable x.

وما يعني بتعريف مفهوم المنطلق Domain أنه إذا كانت الدالة هي f وبالشكل y = f (x) فإن منطلق تلك الدالة هي القيم المناسبة للمتغير المستقل X. أما القيم التي نحصل عليها من التعويض في الدالة y = f (x) بقيم المتغير x فهي قيم المتغير التابع Y وتسمى المجموعة بالمجال أو المدى للدالة Range of a function.

If x is a number in the domain of f, then the number f (x) that f associates with x is called the value of f at x or the image of x under f.

Thus, if $f(x) = x^2$, then the value of f at x = 3 is f (3) = 9 , (i,e) 9 is the image of 3 under f.

وبالتالي يمكن تعريف مجال الدالة كالآتي:

Range:

Is the set of all possible values of f (x) as x varies over the domain of f.

ويمكن حصر النقاط الواجب مراعاتها لتحديد منطلق الدالة بالتالي:

Restrictions on the indep. Variable that determine the domain of a function generally come about in one of three ways:

1) Physical or geometic considerations.

2) Natural restrictions that result from a formula used to define a function.

3) Artificial restrictions imposed by a problem solver for one purpose or another.

النقاط الثلاثة أعلاه يمكن توضيحها بالأمثلة المحددة عند عرض الأمثلة التالية لتحديد منطلق دالة معينة.

مثال 1

أوجد منطلق الدوال التالية:

Find the domain for the following functions:

a) $f(x) = 4x + 1$

يلاحظ هنا أنه لا توجد أي شروط لتحديد منطلق هذه الدالة وبالتالي فإن المنطلق هو جميع الأعداد الحقيقية $\Re$، أي أن:

Domain is $\Re = (-\infty , +\infty)$

b) $f(x) = x^2$

وهنا أيضاً يمكن ملاحظة أنه لا توجد أي شروط لتحديد منطلق هذه الدالة باعتبار أنه يمكن تربيع القيم الموجبة والسالبة وبالتالي فإن المنطلق هو جميع الأعداد الحقيقية $\Re$، أي أنه:

Domain is $\Re = (-\infty , +\infty)$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

في هذه الحالة يلاحظ أن هناك شروط لتحديد منطلق هذه الدالة هو من الشكل Natural domain، حيث أنه يمكن جذر القيم الموجبة ولا يمكن جذر القيم

السالبة للحصول على أعداد حقيقية، بمعنى أن الجذور السالبة تسمى وكما تم تعريفه سابقاً بالأعداد الخيالية imaginary وبالتالي فإن منطلق هذه الدالة هو فقط القيم الموجبة، أي أن:

Domain is $\{x \mid x \geq 0\}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

وكذلك يلاحظ هنا أن هناك شروط لتحديد منطلق هذه الدالة من الشكل Natural domain وهي أنه لا يمكن القسمة على صفر وذلك لحصولنا على قيم غير معرفة. وهذه الحالة تكون عندما x = 1 أو x = 3 وبذلك فإن منطلق هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا القيمتين 1 و 3، أي أن:

Domain is $\{x \mid x \neq 1, 3, x \text{ is Reals}\}$

or Domain is $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$

e) $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, \quad x \neq 0$

But if we write $y = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$

then, h (x) is defined at x – 2, since

$h(2) = 2 + 2 = 4$

Thus, we must write $h(x) = x + 2, x \neq 2$

وفي هذه الحالة نلاحظ أنه عند تطبيق العمليات الجبرية وبواسطة استخدام طريقة الحد المشترك common factor وبعد حذفه من البسط والمقام فإن هذه العملية (تبتر) قطع alter للمنطلق الحقيقي للدالة.

أما عن تحديد مدى الدالة Range of a function فيتم بصورة عامة من الملاحظة Often, the Range of a function is evident by inspection وسيتم عرض ذلك بالمثال التالي:

مثال 2

حدد مدى الدوال التالية Determine the Range of the following:

a) $f(x) = x^2$

وبالـــرجوع للمثال (1) السابق فإن المنطلق الطبيعي لهذه الدالة هو الأعداد الحقيقـــية $(\infty , -\infty) = \Re$. ولكـــن بما أن تربيع القيمة الموجبة وكذلك تربيع القيم الســـالبة هـــو قيمة موجبة دائماً positive values لذلك فإن مدى هذه الدالة سيكون فقط القيم الموجبة، أي أن:

Range is $\{x \mid x \geq 0\}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

منطلق هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 1$ والتي تجعل المقام صفراً. ولذلك فلإيجاد القيم المناسبة والتي ستمثل المدى Range فعلينا تحديد شكل معـــين لإيجاد تلك القيم. والطريقة المناسبة هو حل المعادلة والتي تمثل الدالة f(x) والتـــي ســـيرمز لها بالرمز y بدلالة المتغير X وسنحاول تغيير هذه الدالة لتصبح بالشكل أن المتغير X هو بدلالة المتغير y وكالآتي:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y(x-1) = x+1$$

$$xy - y = x + 1$$
$$xy - x = y + 1$$

$$x(y-1) = y+1$$

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

وبالتالي فإن المدى للدالة الأصلية f (x) هو جميع القيم ما عدا $y = 1$

ويلاحـــظ من المثال السابق أن الدالة تظهر بشكل معين لمجموعة محددة من القـــيم ولكن يمكن أن تظهر الدالة بأكثر من شكل لمجاميع مختلفة من القيم. وعندئذٍ تعـــرف الدالــــة بالوصف functions defined piecewise والتي تظهر في المثال التالي:

مثال 3

Recognize the following function:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 2 \\ 4, & x \le 2 \end{cases}$$

وهذه الدالة لها شكل أن تكون x + 2 للقيم x أكبر من 2 ولها شكل أن تكون بشكل الثابت 4 للقيم x أقل من أو تساوي 2.

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \le -1 \\ 4, & -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

وهـــذه الدالـــة لها ثلاثة أشكال مختلفة حسب المجموعات المختلفة والمؤلف منها منطلق هذه الدالة.

وببســـاطة يتضح من التعامل مع تعريف الدالة والأمثلة السابقة أنه إذا كانت الدالة معرفة لمجموعة من الحدود والذي يمثل منطلق تلك الدالة فإن قيم الدالة يمكن إيجادهـــا بعد التعويض في الدالة لإيجاد قيمة الدالة value of the function والمثال التالي سيوضح ذلك.

مثال 4

Let $f(x) = 2x + 1,\ 0 \le x \le 1$

Find: $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(a)$, $f(a+h)$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ويلاحظ هنا أن المطلوب في هذا المثال إيجاد قيمة الدالة:

$f(x) = 2x + 1$

لقيم مختلفة من المتغير x وبذلك فإنه عندما x = 0 فإن:

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

وعندما x = 1 فإن:

$f(1) = 2(1) + 1 = 3$

أما عندما $x = \frac{1}{2}$ فإن:

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + 1 = 2$

وعندما x = a فإن:

$f(a) = 2a + 1$

وعندما x = a + h فإن:

$f(a + h) = 2(a + h) + 1 = 2a + 2h + 1$

وأخيراً إيجاد:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2a+2h+1-(2a+1)}{h} = \frac{2a+2h+1-2a-1}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

5-3 رسم الدوال Graphs of Functions:

عملية تحديد قيم المتغير X والتي تسمى منطلق الدالة Domain of function وإيجاد قيم الدالة Y بعد التعويض والتي تسمى بمدى الدالة Range of function يعطينا جدول من القيم والذي يمثل قيم x وقيم y أو f (x) المقابلة. وبتحديد هذه القيم على المستوى xy يمكننا رسم النقاط التي تمثل تلك الدالة وبإيصال هذه النقاط نحصل على رسم للدالة.

الأمثلة التالية ستوضح ذلك:

مثال 5

ارسم الدوال التالية Graph the following functions:

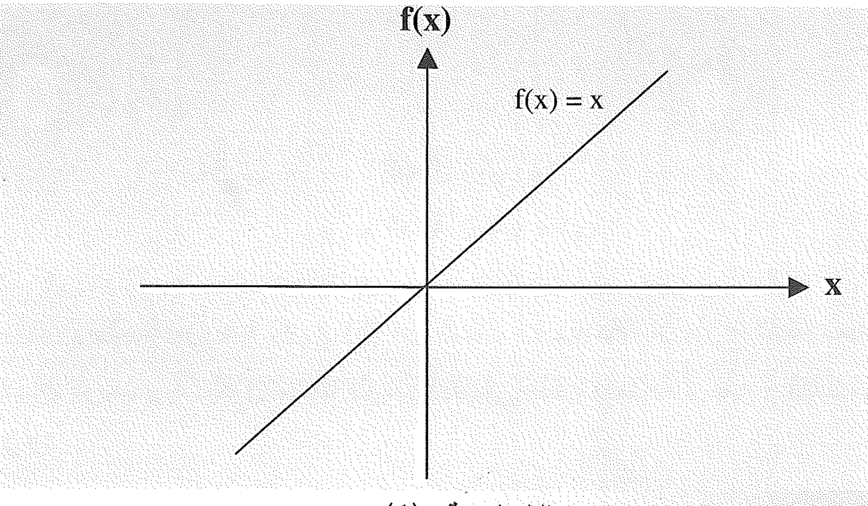
a) $f(x) = x$

بعمـــل جـــدول للقيم x والتي تعود للأعداد الحقيقية سنحصل على قيم f (x) والتي تعود للأعداد الحقيقية كالآتي:

$x : \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$f(x): \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

وبذلك فإن رسم الدالة هي الخط الأفقي القطري الذي يظهر بالشكل رقم (1) التالي:



الشكل رقم (1)

رسم الدالة f (x) = x

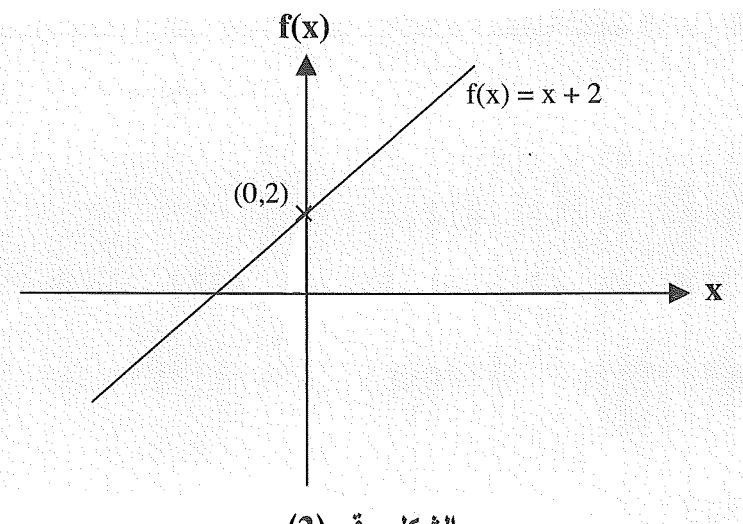
b) $f(x) = x + 2$

بالاســـتعانة بالرســـم السابق والذي يمثل الشكل f (x) = x بإضافة الثابت 2 نحصل على الجدول:

$x : \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$f(x): \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

بمعنى أنه بزيادة ذلك الثابت قيم المتغير التابع y ازدادت بمقدار ذلك الثابت عن الدالة الأصلية والتي تم رسمها في الفرع (a) أعلاه. وبذلك فإن رسم هذه الدالة سيظهر في الشكل رقم (2) أدناه:



الشكل رقم (2)

رسم الدالة f (x) = x + 2

ويلاحظ من هذا الفرع (b) من المثال أنه بإضافة أو طرح ثابت معين لدالة فـــإن الرســـم ســـيكون مشابه للرسم الأصلي ولكن بإضافة أو طرح الثابت من قيم الدالة.

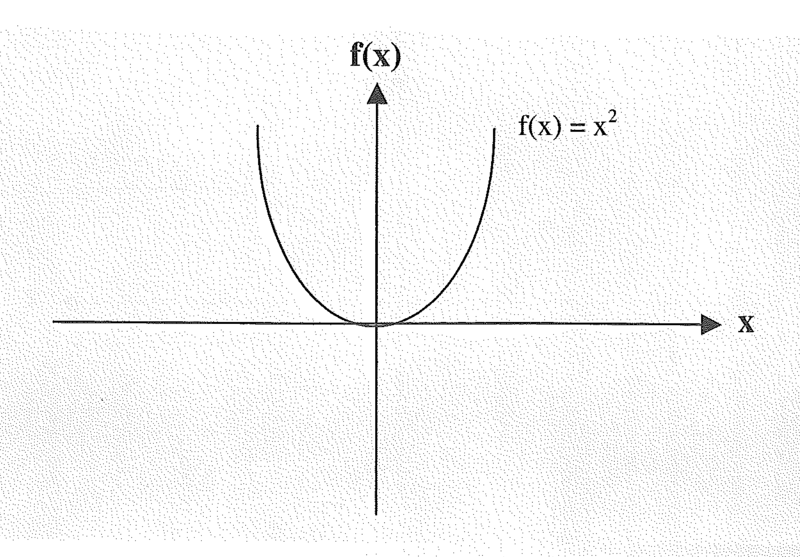
c) $f(x) = x^2$

الجدول المناسب لرسم هذه الدالة هو:

x : ... , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ...

f (x): ... , 9 , 4 , 1 , 0 , 1 , 4 , 9 , ...

بمعنـــى أن قيم الدالة جميعها موجبة وذلك لأن تربيع القيم الموجبة والسالبة للمتغير x ستعطينا قيمة موجبة للمتغير y. وبالتالي فإن الرسم سيظهر بالشكل رقم (3) التالي:



الشكل رقم (3)

رسم الدالة $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

بمـــا أنه لا يمكن جذر القيم السالبة لذلك فيجب أن تكون قيم x هي فقط قيم موجبة بمعنى أن منطلق هذه الدالة Domain هو القيم الموجبة. ونكتب بذلك:

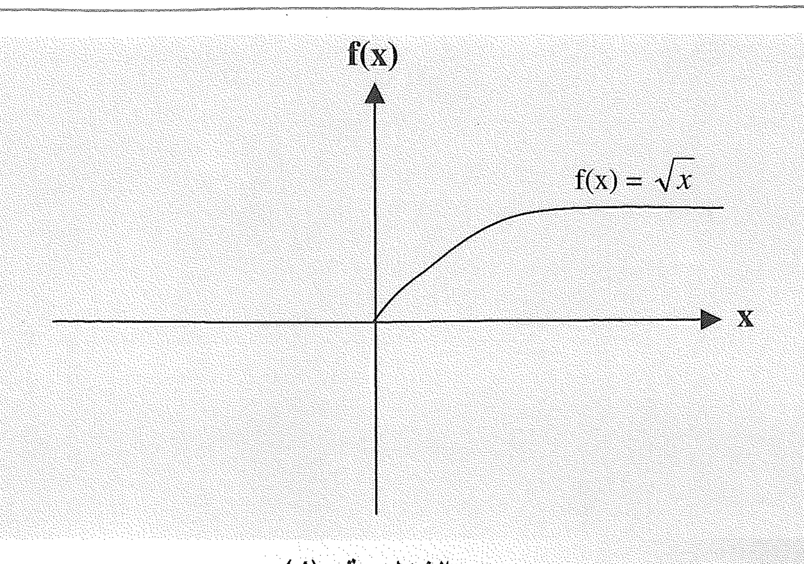
$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

وعن جدول قيم هذه الدالة لدينا:

x : 0 , 1 , 2 , 3 , ...

f (x): 0 , 1 , 4 , 9 , ...

وبالتالي فإن رسم هذه الدالة هو بالشكل رقم (4) التالي:



الشكل رقم (4)

رسم الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

يلاحظ من خلال المثال (5) السابق أن جميع الدوال التي تم رسمها هي لها شكل واحد لمنطلق معين. أما في المثال (6) التالي سنعرض كيفية رسم الدوال التي لها أكثر من شكل لأكثر من منطلق محدد.

مثال 6

ارسم الدوال التالية Graph the following functions:

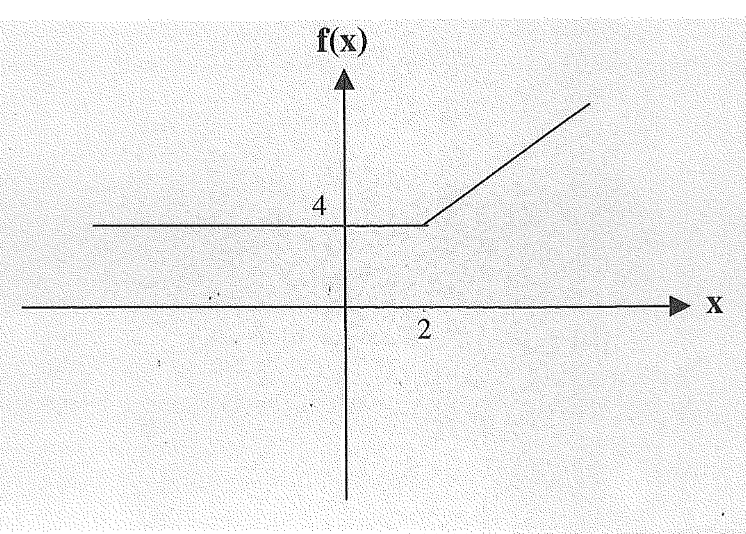
$$a)\ f(x) = \begin{cases} 4, & x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

لرسم هذه الدالة وبالاستعانة بجدول القيم لدينا الجدول التالي:

$x: \ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$f(x): \ldots\ 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7\ \ldots$

حيث تم التعويض في الشكل الثابت للدالة وهو 4 لجميع القيم للمتغير x أقل من 2 أما عندما أصبح x يساوي 2 أو أكثر تم التعويض في الشكل الآخر للدالة وهو x + 2. وبذلك فإن رسم هذه الدالة يظهر في الشكل رقم (5) التالي:



الشكل رقم (5)

رسم الدالة في المثال (6) الفرع (a)

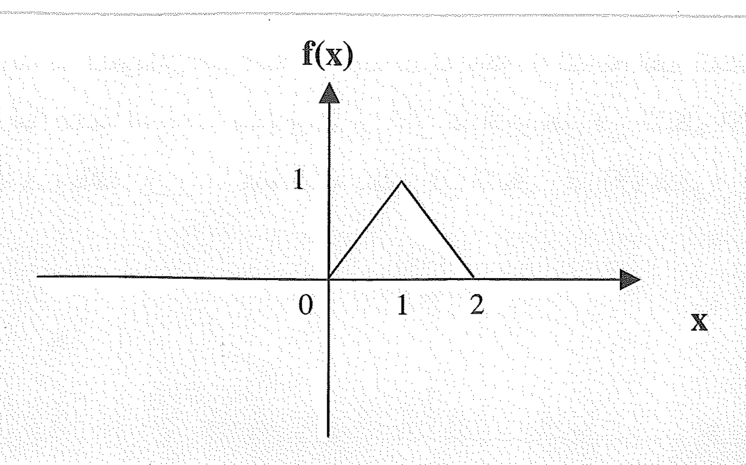
$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

وبعمل جدول عن طريق التعويض في الشكل المناسب نحصل على:

x : … −1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …

f (x): … 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , …

وبالتالي فإن الشكل رقم (6) التالي هو رسم هذه الدالة:



الشكل رقم (6)

رسم الدالة في المثال (6) الفرع (b)

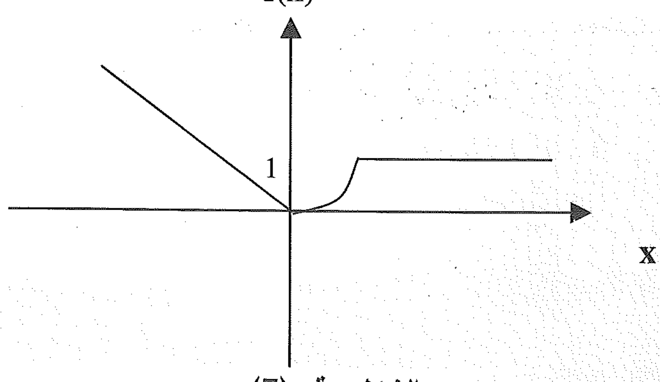
$$c)\ f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

جدول قيم هذه الدالة هو:

x : ... , –2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ...

f (x): ... , 2 , 1 , 0 , 1 , 1 , 1 , ...

وبذلك فإن رسم هذه الدالة يظهر في الشكل رقم (7) التالي:



الشكل رقم (7)

رسم الدالة في المثال (6) الفرع (c)

5-4 أنواع الدوال Kinds of Functions:

الدالة التربيعية والقطع المكافئ Quadratic Functions and Parabolas

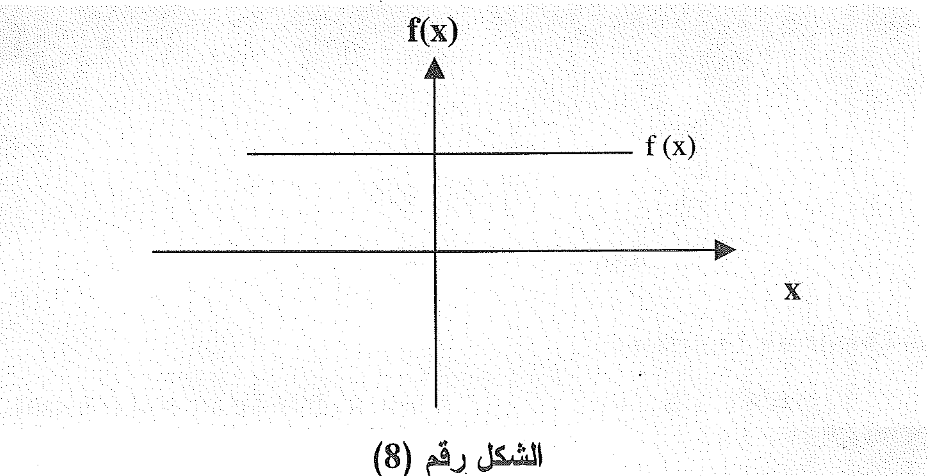
سنعرض في هذا المبحث أنواع الدوال بتسمياتها المختلفة كلاً حسب تعريفها وشكل الدالة الخاصة بها ورسمها وكذلك التطبيقات المختلفة لهذه الدوال.

We will present all kinds of functions with their definitions, graphs, and all applications as follows.

a) Constant Functions:

$f(x) = a$, where a is a real constant

for example, $f(x) = 2$ and it's graph is:



الشكل رقم (8)

رسم الدالة الثابتة $f(x) = 2$

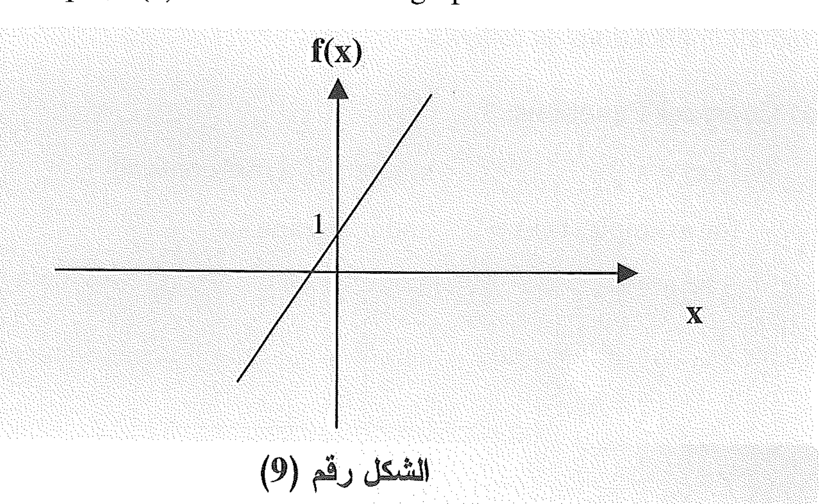
تعتبـــر دالة العائد الحدي Marginal Revenue (MR) من الأمثلة الاقتصادية المُهمة للدالة الثابتة، حيث أن العائد الإضافي المستحصل من بيع وحدة إضافية من الناتج هو الذي يمثل العائد الحدي. فإذا كانت جميع الوحدات تباع بنفس السعر فإن العائد الحدي سيساوي السعر الذي تباع به وحدة الناتج.

b) Linear Function

$f(x) = ax + b$, where a and b are real constants, $a \neq 0$

وهـــذه الدوال الخطية والتي تتمثل بشكل معادلة خط مستقيم $f(x) = ax + b$ حيث أن a , b هي ثوابت حقيقية.

for example, $f(x) = 2x + 1$ and it's graph is:



الشكل رقم (9)

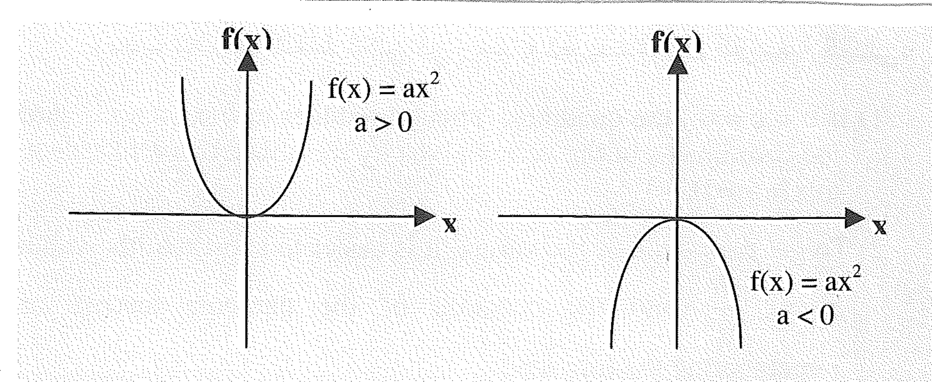
رسم الدالة الخطية $f(x) = 2x + 1$

c) Quadratic Functions:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, where a , b and c are real constants , $a \neq 0$

أمـــا عن رسم هذه الدوال التربيعية فهي عبارة عن منحنى معين حسب شكل الدالة

for example, $f(x) = ax^2$ and it's graph is:



الشكل رقم (10)

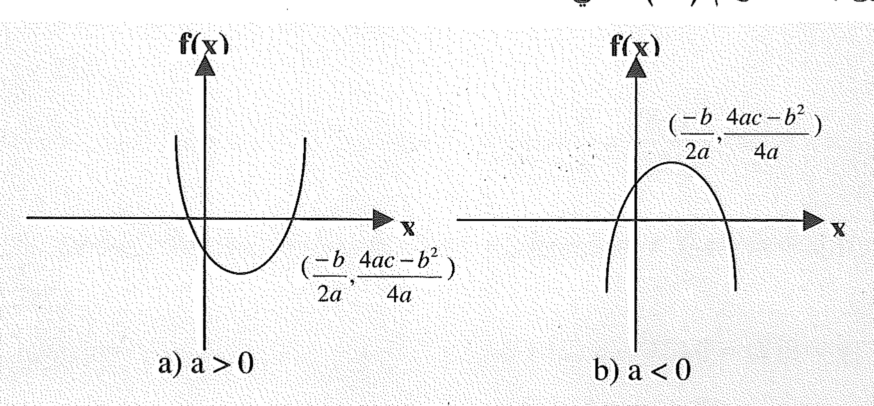
رسم الدالة التربيعية $f(x) = ax^2$

Theorem:

The graph of the quadratic function $f(x) = a x^2 + b x + c$ $(a \neq 0)$ is a parabola that opens upward if $a > 0$ and downward if $a < 0$. Its vertex (which is the lowest point when $a > 0$ and the highest point when $a < 0$) is at the point.

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad \text{and} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

وعن رسم الدالة التربيعية بتعيين نقطة الرأس أو نقطة الذروة vertex سيكون بالشكل رقم (11) التالي:



الشكل رقم (11)

رسم الدالة التربيعية وتعيين نقطة الرأس vertex

ويجب ملاحظة النقاط التالي في رسم x تعريف الدوال التربيعية كالتالي:

1) If b = c = 0 , the quadratic function reduces to $f(x) = a x^2$, and the coordinates of the vertex given by the above theorem reduce to x = y = 0.

2) To get the y-axis of the vertex, it is easier to substitute the value $x = \frac{-b}{2a}$ into the equation of the parabola instead of remembering the formula.

3) The parabola is symmetrical about the vertical line through the vertex.

الأمثلة التالية ستوضح استخدام هذه النقاط في رسم الدوال التربيعية كالآتي:

مثال 7

ارسم الدالة التربيعية التالية وحدد نقطة الرأس أو الذروة.

Graph the following function and find its vertex.

$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

بمقارنة هذه الدالة مع الشكل العام للدالة التربيعية نجد أن:

a = 2 , b = -8 , c = 5

وبالتالـــي لـــتحديد نقطة الرأس vertex علينا التعويض لإيجاد قيمة كل من x , y كالتالي:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

ويمكـــن التعويض المباشر في الدالة عن قيمة x = 2 لإيجاد قيمة y أي f(x) بالشكل:

$$y = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 5$$

$$= 8 - 16 + 5 = -3$$

أو يمكن إيجاد قيمة y بالتعويض في القانون المحدد بالنظرية للحصول على نفس القيمة كالآتي:

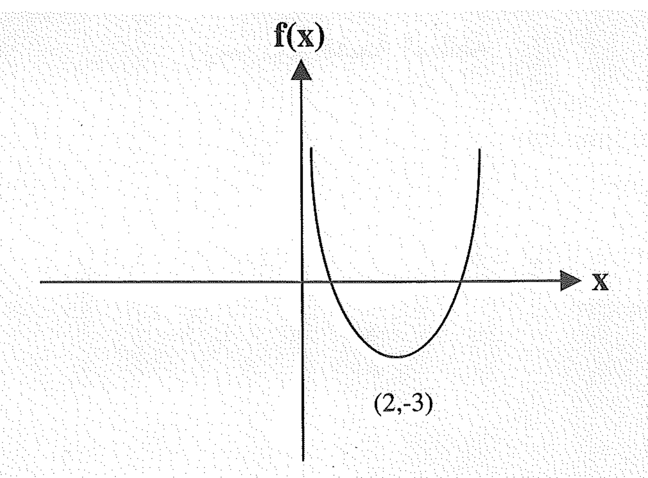
$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{(4)(2)(5)(-8)^2}{4(2)} = \frac{40 - 64}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

ويمكـــن بسهولة ملاحظة أن التعويض المباشر أسهل وأسرع من التعويض الآخر.

أمـــا عن رسم الدالة فيظهر في الشكل (12) التالي بعد عمل الجدول التالي لقيم الدالة:

x : ... , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...

f (x) : ... , 5 , -1 , -3 , -1 , 5 , ...



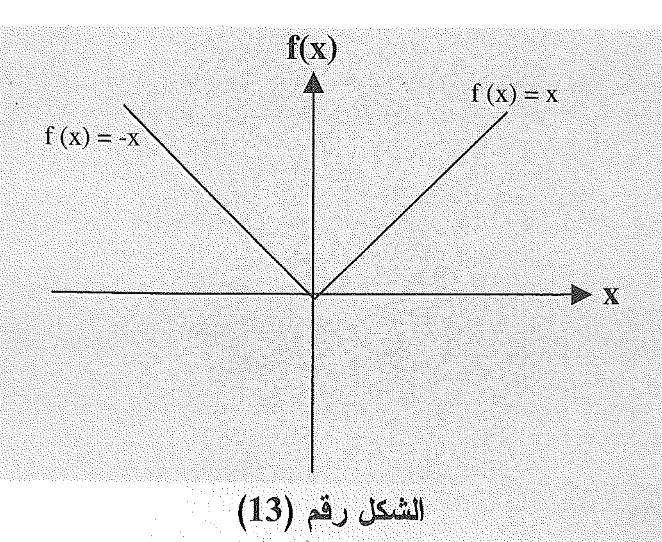
الشكل رقم (12)

رسم الدالة للمثال رقم (7)

b) Absolute value function:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

وعــن رسم هذه الدالة والتي تسمى دالة القيم المطلقة فلدينا الشكل رقم (13) التالي:



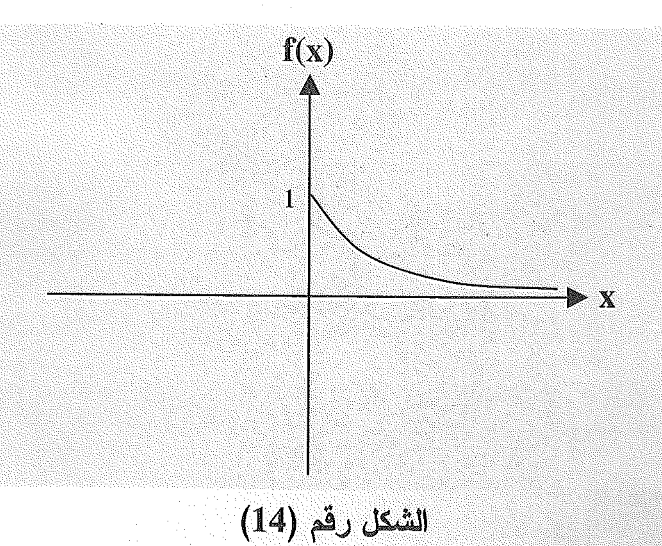
الشكل رقم (13)

رسم دالة القيمة المطلقة

e) Exponential function:

$f(x) = e^{g(x)}$

for example, $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$ and its graph is:



الشكل رقم (14)

رسم الدالة الأسية

f) Logarithmic Function:

$f(x) = \ln x$

ومـــن المعروف أن هناك بعض الخصائص للوغاريتمات والتي من الممكن الاستفادة منها للتعامل مع الدوال اللوغاريتمية وهي:

1) $\ln x y = \ln x + \ln y$

2) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

3) $\ln x^n = n \ln x$

4) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

ومن المعروف أيضاً أن الدالة الأسية هي معكوس الدالة اللوغاريتمية. وعادة ما يتم التعامل مع الدوال اللوغاريتمية بعد تحويلها إلى دوال أسية، حيث أن:

$Y = e^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln e \quad \Rightarrow \quad x = \ln y$

وســـيتم الآن وبعد التعرف على المفاهيم السابقة وعلى أنواع الدوال وكيفية رســـم تلـــك الدوال الدخول في بعض الأمثلة التطبيقية والتي لها أهمية كبيرة لفهم وتحديد الدور الأساسي للمفاهيم الرياضية في الحياة العملية.

مثال 8

إحـــدى شـــركات صـــناعة التلفـــزيون تدعي بأن الكلفة الكلية لإنتاج x من الأجهزة يمكن أن توصف حسب الدالة التالية:

A company produces t.v.'s claims that total production cost for x t.v.'s can be described by:

$c(x) = 1000 + 200x$

Find: a) The constant cost — الكلفة الثابتة

b) Graph the function — رسم الدالة

c) The total cost to produce 100 t.v.'s — كلفة إنتاج 100 جهاز

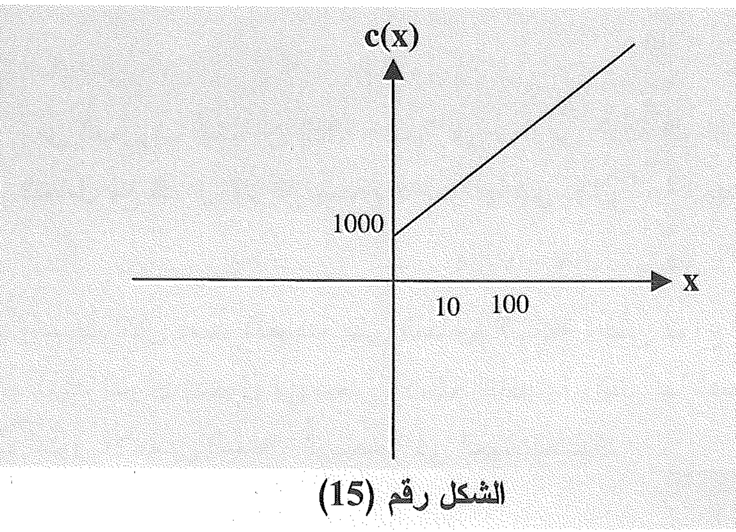
للــتعامل مع هذه الدالة الخطية علينا مقارنتها مع الشكل العام للدالة الخطية وبالتالي فإن:

$$a = 200 \qquad , \qquad b = 1000$$

وبذلك فإن الكلفة الثابتة هي $c(0) = 1000$

أمــا عن رسم الدالة الخطية فيمكن ذلك باستخدام الدول التالي والرسم الذي يظهر في الشكل رقم (15) التالي:

x :	0	10	100	1000	…
c (x) :	1000	3000	21000	201000	…



الشكل رقم (15)

رسم الدالة الخطية $C(x) = 1000 + 200x$

وأخيراً فإن كلفة صنع 100 جهاز هو:

$$c(100) = 1000 + 200(100)$$
$$= 21000$$

مثال 9

مجمــع سكني يحوي على خزان وقود لتزويد المجمع بالوقود. يتم تعبئة هذا الخـــزان في الأول من كانون الثاني ولا توجد أية إضافة للوقود حتى نهاية الشهر. لنفــرض أن t يمــثل عــدد الأيــام بعد الأول من كانون الثاني وأن y يمثل عدد الغالونات من الوقود في الخزان. من خلال سجل المصروفات لوحظ وجود علاقة بين t و y تتمثل تقريباً بالمعادلة التالية:

Fuel conception for a block is given by:

$y = 30000 - 400\,t$, where t is # of days after Dec. 1 st and y is # callon's of fuel

Graph the function and find number of callon's of fuel remains after 20 days of conception.

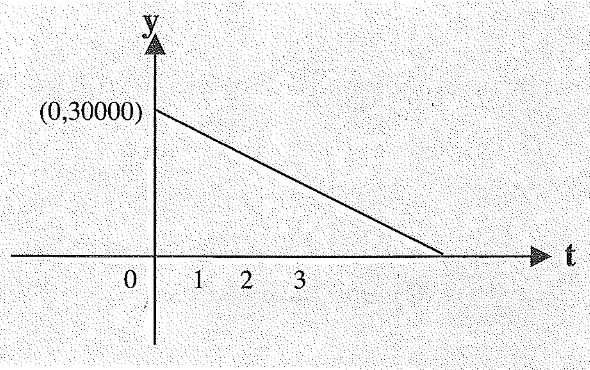
هذه الدالة الخطية لمصروفات الوقود تكتب بالشكل التالي:

$$y = 30000 - 400\,t \quad , \quad 0 \le t \le 31$$

وبذلك فإن جدول القيم هو:

x:	0	1	2	3	...	31
y:	30000	29600	29200	28800		

وأن رسم الدالة يظهر في الشكل رقم (16) التالي:



الشكل رقم (16)

رسم الدالة للمثال رقم (9) $y = 30000 - 400t$

وأخيراً فإن ما تبقى من الوقود بعد مرور 20 يوماً هو:

$$y = 30000 - 400\ (20) = 30000 - 8000 = 2200$$

مثال 10

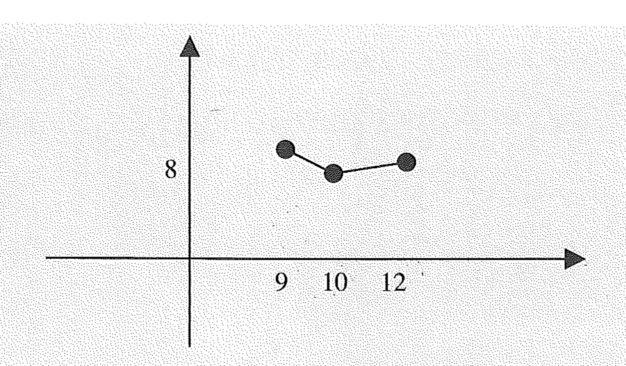
إحدى الشركات الصناعية الصغيرة طاقتها الإنتاجية محدودة y ويرتبط معدل الكلفة بحجم الإنتاج. وقد لوحظ أن معدل كلفة إنتاج 9 وحدات هو 8.5 دينار ومعدل كلفة إنتاج 10 وحدات هو 8 دنانير وأما معدل كلفة إنتاج 12 وحدة فهو 8.25. أوجد العلاقة الدالية التي تربط معدل الكلفة والإنتاج وارسم تلك الدالة.

A small factory with limited resources has the following data:

# products	9	10	12
cost	8.5	8	8.25

State and graph the function that relates # of products with cost

واضح هنا أن جدول عدد الوحدات المنتجة والكلفة هو عبارة عن دالة تربط هذين المتغيرين وبذلك فإن رسم هذه الدالة سيظهر في الشكل رقم (17) التالي:



الشكل رقم (17)

رسم الدالة للمثال رقم (10)

والمخطط يشير إلى أن الدالة تتناقص ثم تتزايد وبذلك فإن هذه العلاقة تصف دالة تربيعية Quadratic function.

مثال 11

أحـــد محـــلات بيع الأصباغ يبيع الغالون الواحد من الدهان بـــ4 دنانير إذا كانت طلبية المستهلك أقل من 100 غالون. ويبيع بسعر 3 دنانير للغالون إذا كانت الطلبـــية علـــى الأقـــل 100 غالون، بالإضافة لذلك فقد منح صاحب المحل خصم مقـــداره 50 ديـــناراً لمن يشتري على الأقل 500 غالون من الدهان. ما هي قائمة المبـــيعات f (x) باعتـــبارها دالـــة لعدد الغالونات المباعة x ثم أوجد قائمة بيع 50 غالون، 200 غالون و1000 غالون من الدهان.

A small company for selling paints sells each gallon by 4 J.D. if the order less than 100 gallon. And sells each gallon by 3 J.D. if the order is at least 100 gallon. Also, the owner gives a discount by 50 J.D. for those buying at least 500 gallons. Write the function and find the price for selling 500 gallon, 200 gallons, and 1000 gallons.

لنفرض أن عدد الغالونات المباعة هي x بسعر 4 دنانير للكمية أقل من 100 غالون وبسعر 3 دنانير للكمية على الأقل 100 غالون، بالإضافة إلى الخصم الثابت بالمقدار 50 ديناراً والذي يجب أن يطرح من سعر البيع إذا كانت الكمية على الأقل 500 غالون وبالتالي فإن الدالة ستكون:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \le x < 100 \\ 3x, & 100 \le x < 500 \\ 3x - 50, & x \ge 0 \end{cases}$$

وعليه فإن قائمة بيع 50 غالون ستكون:

$$f(50) = 4(50) = 200$$

وقائمة بيع 200 غالون هي:

$$f(200) = 3(200) = 600$$

أما قائمة بيع 1000 غالون فهي:

$$f(1000) = 3(1000) - 50 = 2950$$

5-5 تركيب الدوال Combinations of functions:

سنعرض هنا في هذا المبحث كيفية تركيب دوال جديدة من الدوال الأصلية عن طريق استخدام بعض العمليات والتي يمكن تلخيصها على مجاميع مختلفة كالآتي:

1) Arithmetic operations on functions:

If f (x) and g (x) are two functions on the same variable x. Then:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

c) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

d) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

ويتضح من الأشكال أعلاه أن العمليات الجبرية من جمع وطرح وضرب وقسمة على الدوال معرفة وموجودة إن كانت الدوال موجودة للحصول على دوال جديدة باسم f+g ، f-g ، f.g ، $\frac{f}{g}$.

أما عن منطلق الدوال الجديدة هذه فهو عبارة عن مجموعة التقاطع لمنطلقي الدالتين الأصليتين مع مراعاة عدم إدخال القيم التي تجعل منطلق الدالة $\frac{f}{g}$ غير معرفاً من خلال القسمة.

The domain of the functions f+g , f-g , f.g is defined to be the intersection of the domains of f and g. for $\frac{f}{g}$ the domain is the intersection of f and g with the points where g (x) = 0 excluded.

وسيتم من خلال الأمثلة التالية تعريف هذه العمليات الرياضية كالآتي:

مثال 12

Let $f(x) = x$ and $g(x) = x^2$. Find $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f.g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ and state the domains.

عندما تكون:

$f(x) = x$ and $g(x) = x^2$ then:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + x^2$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x - x^2$

$(f.g)(x) = f(x) . g(x) = x . x^2 = x^3$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^x} = \frac{1}{x}$

وواضح أن منطلق الدوال الناتجة هو جميع الأعداد الحقيقية $\Re$ باعتبار أن منطلق الدالة f هو $\Re$ ومنطلق الدالة g هو $\Re$ ما عدا أن منطلق الدالة الأخيرة $\frac{f}{g}(x)$ هو $\Re$ ما عدا القيمة $x = 0$ والتي تجعل المقام صفراً.

مثال 13

Let $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ and $g(x) = x - 1$

Find $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f.g)(x)$, $\frac{f}{g}(x)$ and state the domains.

بافتراض أن:

$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

فإن منطلق الدالة f هو: $[2, \infty)$

وبافتراض أن:

$g(x) = x - 1$

فإن منطلق الدالة g هو: $(-\infty, \infty)$

وبذلك فإن:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 1 = x + \sqrt{x-1}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \sqrt{x-2} - (x-1)$$

$$= 1 + \sqrt{x-2} - x + 1$$

$$= 2 - x + \sqrt{x-2}$$

$$(f.g)(x) = f(x)\, g(x) = (1 + \sqrt{x-2})(x-1)$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1+\sqrt{x-2}}{x-1}$$

واضح أن منطلق جميع الدوال f+g ، g−f و f.g هو:

$$[2, \infty) \cap (-\infty, \infty) = [2, \infty)$$

وكـذلك هـو منطلق الدالة الأخيرة $\frac{f}{g}$ والسبب أن القيمة التي تجعل المقام صفراً لهذه الدالة هو x = 1 والذي هو ليس موجودة في منطلق الدالة أصلاً.

2) Composition of functions:

ويطلق على هذا المفهوم تركيب الدالة من دالة أو دوال أخرى بالشكل:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$\text{and } g \circ f(x) = g(f(x))$$

والتـي تخص دالتين f و g ويمكن من أعلاه إيجاد الدالة f للدالة g أو إيجاد الدالة g للدالة f.

وسيتم توضيح المعنى من خلال الأمثلة التالية:

مثال 14

Let $f(x) = x - 7$, and $g(x) = x^2$

Find $f \circ g(x)$ and $g \circ f(x)$

إذا كان:

$f(x) = x - 7$, and $g(x) = x^2$

فإن:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$
$$= f(x^2)$$
$$= x^2 - 7$$

وكذلك فإن:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$
$$= g(x - 7)$$
$$= (x - 7)^2$$

مثال 15

Let $f(x) = x - 1$, and $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

Find $f \circ g(x)$ and $g \circ f(x)$

إذا كان:

$f(x) = x - 1$, and $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

فإن:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$
$$= f(1 + \sqrt{x-2})$$
$$= 1 + \sqrt{x-2} - 1 = \sqrt{x-2}$$

وأن:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$
$$= g(x - 1)$$
$$= 1 + \sqrt{x-1-2}$$
$$= 1 + \sqrt{x-3}$$

3) Inverse function:

To find the inverse function we have to:

a- Solve the function $y = f(x)$ for x in terms of y

b- Switch x and y. The resulting formula will be $y = f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)$ is called the inverse function of $f(x)$.

وسيتم توضيح خطوات إيجاد الدالة العكسية، حيث أنها الدالة الناتجة بعد تحويل الشكل من كون أن y معتمدة على x إلى أن تكون x معتمدة على y بالأمثلة التالية:

5

مثال 16

Let $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ find the inverse function

لإيجاد الدالة العكسية سنفرض أولاً أن f (x) هي y وبالتالي يصبح لدينا:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

ونحاول أن نعكس هذه الدالة لتصبح الشكل x بدلالة y كالآتي:

$$2y = x + 2 \Rightarrow x = 2y - 2 \Rightarrow x = 2(y - 1)$$

وبالتالي فإن الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدالة f (x) هو:

$$f^{-1}(x) = 2(x - 1)$$

مثال 17

Let $f(x) = e^x$ Find $f^{-1}(x)$

لإيجاد الدالة العكسية للدالة $y = e^x$ نقوم بأخذ اللوغاريتم للطرفين فيصبح لدينا:

$$\ln y = x \ln e \Rightarrow x = \ln y$$

وبالتالي فإن $f^{-1}(x)$ هي:

$$f^{-1}(x) = \ln x$$

مثال 18

Let $f(x) = x^2$. Find the inverse function

لإيجاد الدالة العكسية للدالة $y = x^2$ نقوم بجذر الطرفين لنحصل على:

$x = \mp\sqrt{y}$

وهذا يعني عدم وجود علاقة واحد لواحد بين x و y

Means that there is 1-1 value from x to y since any value for y gives two values for x.

Here, we can say that there are two inverse functions. But, if we restrict the domain of f (x) then, we can say that:

a) If $y = x^2$, $x \geq 0$ then $x = +\sqrt{y}$ and the inverse function here is
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

b) If $y = x^2$, $x < 0$ then $x = -\sqrt{y}$ and the inverse function will be
$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$

أسئلة الفصل الخامس
Exercises for chapter Five

أوجد منطق ومدى كلاً من الدوال التالية للأسئلة (1-10):

Find the domain and the range for each of the following functions:

1) $f(x) = x + 1$

2) $f(x) = -x + 1$

3) $f(x) = \frac{x-1}{4}$

4) $f(x) = \sqrt{x}$

5) $f(x) = \sqrt{x-2}$

6) $f(x) = \sqrt{x+4}$

7) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

8) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

9) $f(x) = (x-3)^2$

10) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

ارسم الدوال التالية للأسئلة (11-21):

Graph the following functions:

11) $f(x) = -\sqrt{x+2}$

12) $f(x) = x^2 - 1$

13) $f(x) = \sqrt{4-x}$

14) $f(x) = \frac{1}{x}$

15) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

16) $f(x) = |x - 1|$

17) $f(x) = 2 - |x|$

18) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

19) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

20) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ 0, & 0 \le x \le 2 \\ \sqrt{x-2}, & x \ge 0 \end{cases}$

21) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

ارسم الدوال التربيعية التالية محدداً إحداثيات نقطة الرأس وفيما إذا كان القطع المكافئ للأعلى أو للأسفل للأسئلة (22-25):

Graph the following quadratic functions, and give coordinates of the vertex and state whether the parabola opens upward or downward:

22) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

23) $f(x) = 1 + 2x + x^2$

24) $f(x) = (1 - x)^2 - 2$

25) $f(x) = (x + 1)^2 - 2(x - 1)^2$

أوجد $f + g$ ، $g - f$ ، $f - g$ ، $f . g$ ، $\frac{f}{g}$ ، $\frac{g}{f}$ للأسئلة (26-30):

26) $f(x) = 2x - 7$ and $g(x) = \sqrt{x}$

27) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ and $g(x) = x^2$

28) $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = \sqrt{1-x}$

29) $f(x) = (x - 1)^2$ and $g(x) = x - 1$

30) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ and $g(x) = \sqrt{x}$

أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$ للأسئلة (31-35):

31) $f(x) = 2x - 7$ and $g(x) = x + 1$

32) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ and $g(x) = x^{-1}$

33) $f(x) = \sqrt{x}$ and $g(x) = \sqrt{1-x}$

34) $f(x) = (x-2)^2$ and $g(x) = \frac{1}{x}$

35) $f(x) = x^2 + 2$ and $g(x) = \sqrt{x}$

أوجد $f^{-1}(x)$ للأسئلة (36-40):

36) $f(x) = 2x + 5$

37) $f(x) = 2x - 7$

38) $f(x) = 7 - 2x$

39) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

40) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

أكتب الأسئلة التطبيقية التالية بشكل دوال ثم أوجد الحل للأسئلة (41-43):

41) شركة كهرباء تصدر الفاتورة بمقدار 10 قروش للوحدة إذا كان عدد الوحدات المستهلكة أقل أو تساوي 50 وحدة و4 قروش لكل وحدة لما يزيد عن ذلك الاستهلاك. أكتب الدالة التي تبين قيمة الفاتورة للوحدات المستهلكة، ثم أوجد قيمة الفاتورة إذا كان الاستهلاك 60 وحدة مع الرسم.

Electricity is charged to consumers at the rate of 10ϕ for the first 50 units and ϕ for amounts in excess of this. Find the function c (x) that gives the cost of using x units electricity, then find the cost for using 60 units with graph.

42) مكتب لتأجير السيارات يؤجر السيارة بعشرة دنانير في اليوم وعشرة قروش لكل كيلو متر تقطعها السيارة. أكتب مقدار الكلفة اليومية لأجر السيارة كدالة

مــن عدد الكيلومترات المقطوعة x، ثم ارسم الدالة وأوجد أجرة تأجير سيارة ليوم واحد وقطعت مسافة مقدار 100 كيلو متر.

A small company for canting cars charges 10 diner a day and 10 fils for each kilometer driving. Write the daily cost for renting a car as a function of number of kilometers x. Graph the function and find the cost for renting a car for one day driving 100 kilometers.

43) ليكن x عدد الوحدات المنتجة ولتكن f(x) دالة التكلفة الكلية المعتمدة على x. أكتب الدالة f(x) والتي تمثل تكلفة ثابتة 100$ وتكلفة متغيرة للوحدة الواحدة 5$ إذا كان عدد الوحدات المنتجة أقل من 100 وحدة. وتمثل f(x) تكلفة ثابتة 200$ وتكلفة متغيرة للوحدة الواحدة 4$ إذا كان عدد الوحدات المنتجة لا تقل عن 100 وحدة. ثم أوجد تكلفة إنتاج 50 وحدة وكذلك تكلفة إنتاج 150 وحدة.

Let x be number of units produced and le f (x) be the function for the total cost. Write the function f (x) in term of a fixed cost of $100 and a variable cost of $5 for each unit produced if the number of units is less than 100 units. And f (x) in term of a fixed cost of $200 and variable cost of $4 for each unit produced if the number of units is at least 100 units. Graph the function and find the total cost for producing 50 units, and total cost for 150 units.

ونشاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل السادس

المصفوفات

6

وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل السادس
المصفـــوفـــات
Matrices

6-1 مقدمة Introduction:

سـيتناول هــذا الفصــل مفهوم المصفوفات Matrices ونظرية المصفوفات Matrices Theory مــن بدايــة تعريفها Their Definitions إلى الرموز الخاصة بالمصـــفوفات Notation and Terminology of Matrices، إيجــاد المــبدلة Transpose والمحـــددات Determinants ومعكـــوس المصـــفوفة The Inverse. ويتضـــمن الفصل جميع العمليات الجبرية للمصفوفات من جمع وطرح Add and Subtract والضـــرب فـــي ثابـــت وضرب مصفوفتين Multiplications. وكذلك يتضمن الفصل حل أنظمة المعادلات الخطية بواسطة المصفوفات Use Matrices to Solve Systems of Linear Equations وسيتضـــمن الفصـــل العديد من الأمثلة Examples والأمـــثلة التطبيقـــية Applied Examples وسيتضمن أيضاً في نهايته على العديد من الأسئلة Exercises.

يـــتألف هذا الفصل من المباحث التالية: المبحث 2-6 المصفوفات matrices والمـــبحث 3-6 الجمـــع والطـــرح للمصـــفوفات Addition and subtraction of matrices والمـــبحث 4-6 ضـــرب المصـــفوفات multiplication of matrices والمـــبحث 5-6 المصـــفوفة الأحادية (المتماثلة) identity matrix والمبحث 6-6 ضـــرب المصفوفة في نفسها والمبحث 7-6 قوانين على المصفوفات Rules for matrices والمـــبحث 8-6 المحـــددات determinants والمـــبحث 9-6 المـــبدلة للمصفوفة Transpose of matrix والمبحث 10-6 معكوس المصفوفة Inverse of a matrix وأخيـــراً المـــبحث 11-6 حـــل المعادلـــة الخطية باستخدام المصفوفات solving system of linear equations using matrices.

6-2 المصفوفات Matrices:

لو فرضنا هناك مصنع firm لإنتاج ثلاثة أنواع من السلع Three Types of Goods وهـــي g_1 , g_2 , g_3 والتـــي تباع إلى اثنان من الشركات المستهلكة Two Customers c_1 , c_2. وكانت المبيعات الشهرية مدرجة في جدول رقم (1) التالي:

		Goods		
		g_1	g_2	g_3
Customers	C_1	5	4	7
	C_2	6	8	10

جدول رقم (1)

مبيعات ثلاث سلع لشركتين

حيث يتضح أنه خلال الشهر باع المصنع 5 وحدات من النوع الأول g_1 إلى المســـتهلك الأول c_1، وباع 10 وحدات من النوع الثالث g_3 إلى المستهلك الثاني c_2 وهكذا لقراءة بقية القيم.

عـــرض البيانات في هذا الشكل للجدول المرتب والذي يمثل شكل مستطيلي Rectangular Array وإذا تـــم إلغـــاء العـــناوين مـــن الجدول سوف نحصل على مستطيل مرتب من الأرقام والذي يمثل المصفوفة Matrix بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

وبصـــورة عامة، أي مستطيل من البيانات محاط بزوج من الأقواس يدعى مصـــفوفة Matrix. ومفـــردات الأرقام التي تكون هذا المستطيل تدعى بالعناصر Elements أو المفـــردات Entries. والمصفوفة تتألف من صفوف Rows وأعمدة Columns.

المصــــفوفة أعـــلاه تــتكون من صفين Two Rows وثلاثة أعمدة Three Columns وبالتالـــي نقـــول بأن هذه المصفوفة من الدرجة Order 3 × 2، ونعني بالدرجـــة order هنا حجم المصفوفة من عدد صفوفها وعدد أعمدتها. ويتضح مما سبق أنه يمكن تعريف المصفوفة كالآتي:

Matrix:

Is a rectangular array of numbers. The numbers are called elements, and the general form of matrix, say A, is:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يتضح أن المصفوفة هي مستطيل من الأرقام الحقيقية المرتبة ومغلقة بأقواس كبيرة، وبصورة عامة المصفوفات تعرف بالحروف بالكبيرة مثل A ، B و C.

وتعـــرف درجـــتها Order بحاصـــل ضرب الصفوف في الأعمدة m × n، ويعـــرف كـــل عنصر Element من عناصر المجموعة بحرف صغير a_{ij} ورقمين صغيرين الأول i يمثل رقم الصف والثاني j يمثل رقم العمود.

والتالي أمثلة مختلفة للمصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ويتضـــح أن A تحـــتوي على ثلاث صفوف وعمودين وبالتالي فإن درجتها Order هي 2 × 3 حيث أن عناصر الصف الأول Elements in First Row (5 ، 4) وعناصـــر العمود الأول Elements in First Column (1 0 4). المصفوفة B هـــي مصفوفة مربعة Square Matrix وذلك لتساوي عدد الصفوف وعدد الأعمدة، أي أن درجتها order هو 2 × 2. والمصفوفة C تسمى مصفوفة عمودية Column Matrix وذلـــك لكونها تحتوي على عمود واحد وثلاثة صفوف وأن درجتها order هو 3 × 1. أما المصفوفة D فتتكون من قيمة واحدة. وأخيراً فإن المصفوفة E هي مصـــفوفة صفية row matrix وأن درجتها order هو 5 × 1 وذلك لكونها تحتوي على صف واحد وخمسة أعمدة.

وســـنقوم الآن بالتعـــرف علـــى بعض المصفوفات المعروفة بأسماء معينة وبأشكال محددة كالآتي:

المصـــفوفة المـــربعة Square Matrix: وهي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة ودرجتها n × n أو m × m، مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ويمكن أن نقول أن A من الدرجة n ونكتب A_n للمصفوفة المربعة.

المصـــفوفة الصفرية zero matrix: وهي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار zero، ويرمز لها عادة بالرمز 0 وتكتب بالشكل التالي:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصـــفوفات المتســـاوية equal matrices: وهي المصفوفات التي تحتوي على نفس العدد من الصفوف والأعمدة أو أن درجتيهما متساوية $m_1 \times n_1 = m_2 \times n_2$

وأن كـل عنصـرين لهما نفس الموقع يكونان متساويين، مثلاً المصفوفتان B و C متساويتان equal matrices إذا كانتا كما يلي:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

العناصـر القطـرية diagonal elements: وهي العناصر التي تظهر على القطـر الرئيسـي للمصفوفة والتي ظهرت في كتابة الشكل العام للمصفوفة. وهي العناصر a_{11} , a_{22} , ... , a_{nn}، أي هي تلك العناصر التي تقع على نفس رقم الصف والعمود. مثلاً العناصر القطرية للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

هي العناصر: $a_{11} = 1$ ، $a_{22} = 5$ ، $a_{33} = 9$

المصفوفة القطرية diagonal matrix: هي المصفوفة المربعة square التي يكـون جمـيع عناصرها أصفار zero باستثناء عناصر القطر الرئيسي diagonal elements. ويمكن كتابة المصفوفة القطرية بالشكل التالي:

$$\text{diag}\,(a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn})$$

ومن أمثلة المصفوفات القطرية، المصفوفة B التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حـــيث أنهـــا مصفوفة قطرية من الدرجة 3 × 3 والتي يمكن كتابتها بالشكل الآخر التالي:

$$B = \text{diag}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6-3 الجمع والطرح للمصفوفات:

Addition and subtraction of matrices

يمكن إجراء عملية جمع عدة مصفوفات أو عملية طرح لمصفوفتين إذا كان لهمـــا نفس الحجم أو الدرجة the same size or order إذا كانت المصفوفتان B,A مـــن نفـــس الدرجة، ولتكن m × n، فإن مجموعهما A + B، ونطلق عليه اسم C، ســيكون من الدرجة m × n والعناصر نحصل عليها من جمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين.

If A and B are both of the same size or order. Then, the sum A + B is the matrix obtained by adding the elements of B to the corresponding elements of A. Similarly, we can obtain A-B

وسيتم توضيح هذه العملية الواضحة من خلال المثال التالي:

مثال 1

Let $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, and

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Find, if possible A + B , B + A , A – B , B – A , A + C , B – C

يمكـــن هنا ملاحظة أن درجة order المصفوفة A هو 3 × 2 وكذلك درجة المصـــفوفة B، أمـــا المصـــفوفة C فـــإن درجتها هو 2 × 2 وبالتالي يمكننا جمع

المصــــفوفتين A و B وكذلك طرحهما أما أي عملية جمع أو طرح لأي منهما مع المصفوفة C فلا يمكن ذلك. وبالتالي فإن النتائج ستكون كما يلي:

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & 3+2 & 5+4 \\ 10+4 & 7+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B + A \begin{bmatrix} 3+4 & 2+3 & 4+5 \\ 4+10 & 3+7 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ هنا أن $A + B = B + A$

أما عن طرح المصفوفات فلدينا:

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-3 & 3-2 & 5-4 \\ 10-4 & 7-3 & 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B - A \begin{bmatrix} 3-4 & 2-3 & 4-5 \\ 4-10 & 3-7 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $A - B = -(B - A)$

6-4 ضرب المصفوفات Multiplication of matrices:

لتوضـــيح عملية الضرب سنبدأ بتوضيح عملية ضرب مصفوفة في ثابت ثم ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية ثم ضرب مصفوفتين كالآتي:

6-4-1 ضرب مصفوفة في ثابت Scalar multiplication:

ويعنـــي ضـــرب كــل عنصر من عناصر المصفوفة، ولتكن A، في الثابت الحقيقي، وليكن c، لنحصل على الناتج بالشكل cA ويمثل مصفوفة من نفس درجة المصـــفوفة A، أما عناصرها فناتجة عن ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالثابت c.

If A is any matrix and C is any constant (scalar). Then, the product cA is the matrix obtained by multiplying each element of A by c.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال 2

Let $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$, and $c = 5$, $d = \frac{1}{5}$

Find, if possible cB and dB

واضح أن ناتج الضربين cB و dB كالآتي:

$$cB = 5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 25 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$dB = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 2/5 & 5/5 \\ 1/5 & 0/5 \end{bmatrix}$$

ويتضح من أعلاه أن عملية الضرب أو عملية القسمة لمصفوفة مع ثابت scalar يتم بتغيير جميع عناصر المصفوفة بالضرب أو القسمة على ذلك الثابت.

6-4-2 ضرب مصفوفية صفية في مصفوفة عمودية:

Multiplication of a row by a column

افترض أن هناك مصنع ينتج أربعة أنواع من السلع وكل سلعة تحتاج إلى عدد من الوحدات الأولية وكما معرف في المصفوفة الصفية row matrix، A، التالية:

$$A = \begin{bmatrix} \overset{D}{6} & \overset{R}{5} & \overset{N}{4} & \overset{Q}{10} \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن البضاعة D تحتاج إلى 6 وحدات والبضاعة R تحتاج إلى 5 وحدات والبضاعة N تحتاج إلى 4 وحدات أما البضاعة Q فتحتاج إلى 10 وحدات. وإذا كان كل وحدة من هذه الوحدات المختلفة لهذه السلع هي كما موضح في المصفوفة العمودية column matrix، B وهي:

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

فإن كلفة كل وحدة من وحدات D هو 7 وكلفة كل وحدة من وحدات R هو 8 وكلفة كل وحدة من وحدات N هو 5 أما كلفة كل وحدة من وحدات Q فهو 3.

فلإيجاد كلفة تصنيع هذه السلع الأربعة للمصنع سيكون:

$$\text{Cost} = AB = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (6)(7) + (5)(8) + (4)(5) + (10)(3)$$
$$= 42 + 40 + 20 + 30$$
$$= 132$$

وبالإشارة إلى الأرقام السابقة فقد قمنا بضرب الرقم الأول من المصفوفة A في الرقم الأول من المصفوفة B والرقم الثاني من A بالرقم الثاني من B والرقم الثالث من A بالرقم الثالث من B والرقم الرابع من A بالرقم الرابع من B. وبعدها قمنا بجمع هذه النواتج الأربعة لنحصل على قيمة واحدة هي 132.

وهــذه الطريقة لصيغة الضرب يمكن تطبيقها لضرب أي صف row بعمود column وهذه الطريقة من الضرب يمكن تلخيصها كالآتي:

إذا كان لدينا الصف i من الدرجة $1 \times p$ بالشكل التالي:

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{ip}]$$

ولدينا العمود j من الدرجة $p \times 1$ بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} b_{ij} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{bmatrix}$$

فإن حاصل الضرب هو قيمة واحدة one value نحصل عليها كالآتي:

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{ij} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{bmatrix} = a_{i1}\, b_{ij} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$$

مثال 3

إذا كانت لدينا المصفوفات التالي:

Given the following matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \text{ and } D = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Find AB and CD

لإيجاد حاصل الضرب AB لدينا:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = (3)(2) + (0)(6) + (4)(5) = 6 + 0 + 20 = 26$$

ولإيجاد حاصل الضرب CD لدينا:

$$CD = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = (10)(2) + (7)(5) + (8)(3) + (4)(6) = 20 + 35 + 24 + 24 = 103$$

ويجدر بنا هنا ذكر الملاحظات المهمة التالية والتي يجب مراعاتها عند ضرب المصفوفات وهي:

1) يجب أن نضع مصفوفة الصف أولاً على جهة اليسار Left ومصفوفة العمود على جهة اليمين Right كما في المثال السابق.

2) يجب أن تكون عدد المفردات أو العناصر number of elements في مصفوفة الصف تساوي عدد العناصر في مصفوفة العمود كما في المثال السابق، ولهذا لا يمكن ضرب AD أو CB لكونها غير معرفة not defined.

4-6-3 ضرب مصفوفتين Multiplication of two matrices:

يمكن توسيع طريقة الضرب السابق ذكرها لتشمل ضرب المصفوفات التي تحتوي على أكثر من صف rows أو أكثر من عمود columns بالاعتماد على طريقة ضرب الصف في العمود لتتكرر إلى ضرب صفوف المصفوفة الأولى بأعمدة المصفوفة الثانية.

وبصـــورة عامة in general، افرض لدينا المصفوفة C الناتجة عن ضرب المصـــفوفتين A و B بالشكل AB، أي أن C = AB، فإن العناصر elements C_{ij} للمصـــفوفة C هـــي حاصـــل ضرب الصف i من المصفوفة A في العمود j من المصـــفوفة B. ولـــذلك فـــإن الضرب السابق والذي تم إيضاحه وعمله في الفقرة الســـابقة يسمى الضرب الداخلي inner product وذلك لأن بتكرار عملية الضرب الداخلي لصفوف المصفوفة A وأعمدة المصفوفة B نحصل على عناصر مصفوفة حاصـــل الضـــرب C. مـــع الإشارة إلى أن عملية الضرب تلك تحتاج إلى الشرط التالـــي وهـــو أن عـــدد الأعمـــدة j في المصفوفة A يساوي عدد الصفوف i في المصفوفة B، وبغير ذلك لا نستطيع الضرب.

وبالتالي يمكن تلخيص عملية ضرب المصفوفتين A و B كالآتي:

إذا كانت المصفوفة A من الدرجة m × p والمصفوفة B من الدرجة p × n فـــإن حاصـــل الضرب AB، وليكن المصفوفة C، هو من الدرجة m × n وتحدد عناصـــرها بأن يكون العنصر في الصف i و العمود j من المصفوفة C ناتج عن عملية ضرب الصف i من المصفوفة A بالعمود j من المصفوفة B.

If A is an m × n matrix and B is an p × n matrix. Then, the product AB is the m × n matrix whose elements are defined as follows: To find the element in row i and column j of AB, single out row i from A and column j from B and multiply them using inner product.

وسيتم فيما يلي توضيح عملية الضرب عن طريق الأمثلة التالية:

مثال 4

اضرب المصفوفات التالية:

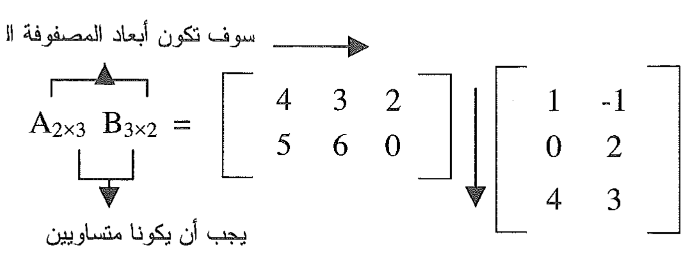
Find the product AB and BA, if possible

where $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

يجـــب علينـــا أولا الـــتحقق مـــن شرط مساواة عدد الأعمدة columns في المصفوفة A مع عدد الصفوف rows في المصفوفة B.

وهـــنا قد تحقق الشرط، حيث أن عدد الأعمدة في A هو 3 وعدد الصفوف في المصفوفة B هو 3 أيضاً ولهذا نستطيع إيجاد AB.

أما عن عملية الضرب فلدينا:



$$A_{2\times3}\ B_{3\times2} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

وهـــنا نلاحـــظ أن ضرب الصف الأول في العمودين يعطينا الصف الأول للمصـــفوفة الجديـــدة، وضـــرب الصف الثاني في العمودين يعطينا الصف الثاني للمصفوفة الجديدة وكما يلي:

$$AB = \begin{bmatrix} (4)(1)+(3)(0)+(2)(4) & (4)(-1)+(3)(2)+(3)(2) \\ (5)(1)+(6)(0)+(0)(4) & (5)(1)+(6)(2)+(0)(3) \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$AB_{2\times2} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

عدد الصفوف في المصفوفة الجديدة يساوي عدد الصفوف في المصفوفة A وعدد الأعمدة في المصفوفة الجديدة يساوي عدد الأعمدة في المصفوفة B.

أما عن الضرب BA فلدينا:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3×2 $\qquad$ 2×3

الداخل يجب أن تكون متساوي، وهي كذلك بضربها

أبعاد المصفوفة الجديدة

$BA_{3\times3}$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & [1 \quad 1-]\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [0 \quad 2]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & [0 \quad 2]\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & [0 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [4 \quad 3]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & [4 \quad 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & [4 \quad 3]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$BA_{3\times3} = \begin{bmatrix} (1)(4)+(-1)(5) & (1)(3)+(-1)(6) & (1)(2)+(-1)(0) \\ (0)(4)+(2)(5) & (0)(3)+(2)(6) & (0)(2)+(2)(0) \\ (4)(4)+(3)(5) & (4)(3)+(3)(6) & (4)(2)+(3)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 10 & 12 & 0 \\ 31 & 30 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ولهـذا مـن خـلال المثال (4) أعلاه نجد إن المصفوفة الناتجة من ضرب المصـفوفة A فـي B أي AB لا تسـاوي المصفوفة الناتجة من ضرب B في A والتي هي BA، وكما تلاحظ أن أبعاد المصفوفة AB هو 2 × 2 أما أبعاد BA فهو 3 × 3.

والملاحظة الثانية نلاحظ أن الصف للمصفوفة الأولى يكون ثابت أي نضرب جميع أعمدة المصفوفة B في صف واحد من A وهكذا لكل صف، ويمكن ملاحظة يكـون كل عمود ثابت على مستوى العمود فالعمود الأول يضرب بجميع صفوف المصـفوفة الأولـى ومنه يكون عمود المصفوفة الجديدة، فالعمود الأول ينتج منه العمود الأول للمصفوفة الجديدة والعمود التالي للمصفوفة B ينتج منه العمود الثاني للمصفوفة الجديدة وهكذا.

مثال 5

اضرب المصفوفات التالية C و D، أي إيجاد CD و DC إذا كان كلاً منهما كما يلي:

Find the product of the matrices C and D, or find CD and DC if C and D as:

$$C_{1\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D_{3\times1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$C_{1\times3}\, D_{3\times1}$ = we can product them (3=3)

الداخل

الخارج

$$CD = \begin{bmatrix} (5)(3) + (0)(3) + (-1)(2) \end{bmatrix} = 16$$

أما لإيجاد حاصل الضرب CD فلدينا:

$$D_{3\times1}\, C_{1\times3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الداخل

الخارج

$$DC_{3\times3} = \begin{bmatrix} (5)(3) & (5)(0) & (5)(-1) \\ (3)(3) & (3)(0) & (3)(-1) \\ (2)(3) & (2)(0) & (2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$DC = \begin{bmatrix} 19 & 0 & -5 \\ 9 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ويمكن ملاحظة كيف يؤثر العمود من المصفوفة الثانية C في المصفوفة الجديدة DC فإذا كان العمود يحتوي على zero فيكون جميع قيم العمود الجديد تساوي zero. وأيضاً نلاحظ عندما يكون هناك عمود إشارته سالبة فيكون العمود الجديد جميع قيمه سالبة. ويمكن أيضاً أن نلاحظ أن ضرب صف في عمود يكون الناتج قيمة واحدة ويكون هناك ثلاث أعمدة وثلاث صفوف وإذا غيرنا ترتيب ضرب المصفوفات كما في DC حيث تم احتساب مفردات العمود على أنها صفوف ومفردات الصف على أنها أعمدة وكانت النتيجة المصفوفة DC في أبعادها 3 × 3.

مثال 7

اضرب المصفوفات التالية إذا أمكن C , B , A

Find the product of the following matrices A, B , C, if possible.

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

لا يمكن ضرب المصفوفات التالية وذلك:

It is impossible to multiply the matrices:

$A \times B$ ($2\times2 \neq 3\times2$)

لعدم تساوي أعمدة A مع صفوف B

The product AB is not defined

$A \times C$ ($2\times2 \neq 3\times3$)

لعدم تساوي أعمدة A مع صفوف C

The product AC is not defined

$B \times C$ ($3\times2 \neq 3\times3$)

لعدم تساوي أعمدة B مع صفوف C

The product BC is not defined

6-5 المصفوفة الأحادية (المتماثلة) Identity Matrix:

تدعى المصفوفة المربعة square matrix مصفوفة أحادية أو متماثلة إذا كان جميع عناصرها على القطر diagonal يساوي واحد وجميع العناصر elements خارج القطر تساوي صفراً zero. والمصفوفات التالية تمثل مصفوفات أحادية متماثلة identity matrices للأحجام 2 × 2 و 3 × 3، وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتعرف المصفوفة الأحادية المتماثلة بالحرف I عندما يكون حجمها أو ترتيبها معروف بدون غموض.

مثال 7

افرض لديك المصفوفة A كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

أوجد حاصل ضرب AI و IA، حيث أن I تمثل مصفوفة متماثلة أحادية.

Find AI and IA, where I denotes the identity matrix

يمكـــن ضــــرب كلاً من AI و IA إذا كان كلاً من A و I مصفوفات مربعة square matrices لـــنفس الحجـــم أو الدرجـــة. وبما أن A مصفوفة 2 × 2، إذن المصـــفوفة المـــتماثلة الأحاديـــة identity matrix يجب أن يكون حجمها 2 × 2، ولذلك:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(1) + d(0) & c(0) + d(1) \\ a(1) + b(0) & a(0) + b(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = A$$

ونفس الشيء Similarly:

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = A$$

ولذلك: $AI = IA = A$

وتستطيع الملاحظة من هذا المثال هو عند ضرب أي مصفوفة في مصفوفة أحادية لا يحدث تغيير على المصفوفة الأصلية مهما كان حجمها. أو نستطيع القول

هو أن المصفوفة الأحادية identity matrix I تسلك سلوك رقم 1 عند ضربها في أي مصـــفوفة ذات أرقام حقيقية real numbers. وهذا هو التبرير نسميه المصفوفة الأحاديـــة identity matrix ولأي حجم من الأحجام. وكذلك إذا كانت A مصفوفة مـــربعة square matrix لأي حجم من الأحجام يمكن أن تكون العلاقة التالية حقيقة بدون أي لبس أو غموض $AI = IA = A$

6-6 ضرب المصفوفة المربعة Square matrix في نفسها ($A.A = A^2$):

وكذلك نستطيع تعميم ضرب المصفوفة المربعة square matrix A في نفسها والتي حجمها n × n. وسوف تكون نتيجة الضرب $A.A = A^2$

وكذلك ضربها في نفسها مرة أخرى يعطينا ما يلي:

$$A.A.A = A^3$$

ونســتطيع الاســتمرار علـــى هـــذه الطريقة إلى أي عدد من مرات ضرب المصفوفة فكل مرة سوف تزداد القوى The power واحد.

6-7 قوانين على المصفوفات Rules for matrices:

سنعرض في هذا المبحث بعض القوانين أو النظريات (بدون براهين) والتي يمكن الاستفادة منها لحل الأمثلة والأسئلة الخاصة بالمصفوفات كالآتي:

1) $A + B = B + A$ (Commutative law for addition)

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associative law for addition)

3) $A (BC) = (AB) C$ (Associative law for multiplication)

4) $A (B + C) = AB + AC$ (Left distributive law)

5) $(B + C) A = BA + CA$ (Right distributive Law)

6) $A (B – C) = AB - AC$

7) $(B – C) A = BA – CA$

8) $a (B + C) = aB + aC$

9) $a (B – C) = aB – aC$

10) $(a + b) C = aC + bC$

11) $(a - b) C = aC - bC$

12) $a (bC) = abC$

13) $a (BC) = (aB) C = B (aC)$

14) $A + 0 = 0 + A = A$

15) $A - A = 0$

16) $0 - A = -A$

17) $A0 = 0 \quad , \quad 0A = 0$

18) $AI = A \quad , \quad IA = A$

6

6-8 المحددات Determinants:

تعتبر المحددات من الخصائص المهمة في دراسة المصفوفات وفكرة المحددات للمصفوفات المربعة square matrix ستعرض كما يلي:

An important attribute in studying matrix algebra is the concept of determinant for a square matrix.

يرمز إلى المحددة بخطين مستقيمين مثل محدد A هو |A| أو يمكن أن تمزج فقط في أول ثلاث حروف الصغيرة det (A). وأيضاً يعطى للمصفوفة ترتيب مثلاً المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

نرمز للمحددة لهذه المصفوفة |A| أو det (A) أو يمكن أن تكتب بشكل كامل مثلاً، $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ، ودرجتها order هو 2.

ويمكن إيجاد المحددة لهذه المصفوفة كما يلي:

$$\det (A) = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{22}$$

وبصــورة عامــة لإيجــاد المحددة للمصفوفة الرباعية 2 × 2 فهو حاصل ضــرب عناصــر القطــر الرئيسي main diagonal مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي cross-diagonal كما تلاحظ من المثال التالي:

مثال 8

أوجد المحددات للمصفوفات التالية A و B.

Find the determinants for the matrices A and B, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

$$\det(B) = 5 \times 2 - (-1 \times 6) = 10 + 6 = 16$$

أمــا إذا كانــت المصــفوفة المربعة square matrix ودرجتها 3 × 3. فإن حســاب المحــددة لها يتم بعدة طرق. وأحد هذه الطرق هو إضافة العمودين الأول والثانــي إلى المصفوفة ومن ثم نبدأ بضرب عناصر القطر الرئيسي وكذلك ضرب عناصــر القطــرين الأخــرى اللذان بعده ونجمعها ونطرح منهما حاصل ضرب مفردات القطر الثانوي cross-diagonal والأقطار الثانوية الأخرى التي قبلها وكما في المثال التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(3) (2) (1)

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

(1) (2) (3)

$$\det(A) = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{12} \times a_{21} \times a_{33})$$

$$- (a_{12} \times a_{21} \times a_{33} + a_{11} \times a_{23} \times a_{31} + a_{13} \times a_{22} \times a_{31})$$

مثال 9

أوجد المحددات للمصفوفات التالية:

Find the following determinants:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(+) (+) (+) (1) (2) (3)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad (1)\ 40 \quad (2)\ 30 \quad (3)\ 0$$

(−) (−) (−) (1) (2) (3)

28 0 36

$$\det(A) = (28 + 0 + 36) - (40 + 30 + 0) = -6$$

0 0 −18

+ + + (1) (2) (3)

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

(1) (2) (3)

48 10 0

$$\det(B) = (48 + 10 + 0) - (0 + 0 - 18) = 76$$

6.9 المبدلة للمصفوفة Transpose of a matrix:

المبدلة للمصفوفة A هو تغيير صفوف المصفوفة A إلى أعمدة وتغيير أعمدتها إلى صفوف ويرمز لمبدلة المصفوفة A بالرمز A^T أو A' (وتقرأ A برايم).

$A_{ij} \Rightarrow A^T_{ji}$ and is obtained by interchanging the rows and columns of A.

مثال 10

أوجد المبدلة للمصفوفات التالية:

Find the transpose for:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A^T_{ji} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & -10 \end{bmatrix}, \quad B^T_{ji} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن إيجاد المبدلة هو تبديل الصفوف إلى أعمدة وتبديل الأعمدة إلى صفوف، ومن أهم خصائص مبدلة المصفوفة هو Properties for transpose:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

وبالرجوع لتعريف المبدلة يمكن تعريف المصفوفة المتماثلة Symmetric matrix بالشكل التالي:

إذا كانت المصفوفة المربعة A من الدرجة n × n وكانت $A = A^T$ فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة متماثلة.

Let A be a square matrix of order n × n. Then, if $A = A^T$, A is called a symmetric matrix.

for example $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, and since $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ then A is a symmetric matrix.

وكـــذلك يلاحـــظ هـــنا أن ولكل مصفوفة A من الدرجة n × m فإن AA^T وكذلك A^TA هما مصفوفات متماثلة.

If A is any matrix of order m × n. Then, AA^T is a symmetric matrix, and so is A^TA.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال 11

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ Find AA^T and A^TA

ولإيجاد النواتج لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{4\times2} \quad \text{and } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times4}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 3 & 8 \\ 14 & 20 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 12 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ بأن الناتج يمثل مصفوفة متماثلة.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

وكذلك فإن الناتج هو مصفوفة متماثلة.

ويتبين من المثال (11) أن استخدام المبدلة طريقة جيدة ومفيدة لكثير من التطبيقات لتحويل المصفوفات الغير متماثلة إلى أن تكون مصفوفات متماثلة.

6-10 معكوس المصفوفة Inverse of a matrix:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان بالإمكان إيجاد مصفوفة مربعة أخرى، ولتكن B، من نفس الدرجة بحيث أن $AB = BA = I_n$ يقال عندئذٍ أن المصفوفة A قابلة للانعكاس. وتسمى B معكوس المصفوفة A. ويرمز لمعكوس المصفوفة A عادة بالرمز A^{-1}.

If A is a square matrix of order n. And if we can find a square matrix of order n, say B, such that $AB = BA = I_n$ then we say that A is invertable and B is the inverse of A. The inverse of a matrix A is denoted by A^{-1}.

ويلاحظ مما سبق ما يلي:

1) يعرف المعكوس فقط للمصفوفات المربعة

Inverse matrices are defined for square matrices only.

2) إذا كان A معكوس للمصفوفة B فإن B هي أيضاً معكوس للمصفوفة A.

If A is the inverse of B then B is the inverse of A.

3) إذا كان للمصفوفة A معكوس عندئذٍ يقال بأن A قابلة للانعكاس.

If A has an inverse then we say that A is invertable.

4) إذا كان للمصفوفة A معكوس فهناك معكوس واحد فقط.

If A has an inverse then it is unique.

5) ليست جميع المصفوفات المربعة لها قابلية الانعكاس.

Not all square matrices are invertable.

ويمكن على ضوء الخصائص والملاحظات أعلاه إعطاء فكرة عن وجود معكوس لمصفوفة معينة أم لا والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 12

هل أن $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ معكوس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

للإجابة على هذا التساؤل علينا إيجاد حاصل الضرب AB وكذلك حاصل الضرب BA وإن كان كلاهما مساوياً إلى المصفوفة I_2 عندئذٍ A هو معكوس B وكذلك B هو معكوس A.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = I_2$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = I_2$$

وبالتالي فإن B هو معكوس A وكذلك فإن A هو معكوس B.

معكوس المصفوفة المربعة A، والذي يرمز له بالرمز A^{-1}، يمكن إيجاده بعدة طرق وأحد أهم هذه الطرق والتي سيتم ذكرها هنا هي:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

وتمثل قسمة ما يسمى بالمصفوفة المرافقة Adjoint matrix، والتي يرمز لها بالرمز adj(A)، على محدد المصفوفة determinant، والذي يرمز له det(A) أو |A|. ويجب الإشارة إلى أنه يوجد للمصفوفة معكوس إذا لم تكن المحددة صفراً، ويعني ذلك أن A^{-1} موجود إذا كان $|A| \neq 0$.

وهنا ولإيجاد المعكوس فإن det(A) أو |A| تم تعريفه سابقاً أما adj(A) فيجب علينا توضيح هذه المصفوفة قبل الدخول في إيجاد المعكوس كالآتي:

لإيجاد adj(A) لمصفوفة A من الدرجة 2 × 2 فإن هناك طريقتان هما:

1) استخدام الطريقة السريعة وكما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad adj(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ويتضح من ذلك أن هذه الطريقة تعتمد على تغيير مواقع عناصر القطر الرئيسي main diagonal وتغيير إشارات عناصر القطر الثانوي Cross diagonal، ويلاحظ هنا بأن هذه الطريقة مناسبة لمصفوفة من الدرجة 2×2 فقط.

مثال 13

أوجد معكوس المصفوفات التالية:

Find the inverse matrices for:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

سنقوم بحل هذا المثال باستخدام الطريقة السريعة وإيجاد adj(A) كالآتي:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

أما عن det(A) فلدينا:

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

وبالتالي فإن المعكوس A^{-1} يمكن إيجاده ليكون:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}]} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

وباستخدام الطريقة السريعة السابق ذكرها لدينا:

$$adj(B) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (4)(8) - (3)(10) = 32 - 30 = 2$$

وبالتالي فإن B^{-1} هو:

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{\det(B)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3/2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

2) استخدام الطريقة المطولة وكما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = adj(A) \qquad adj(A) = \left[(i+j)^{-1} \quad A_{ij} \right]^T$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{22}$$

تكــون الإشارة موجبة لكون مجموع (i+j) زوجي أما إذا كان فردي فسوف تكون سالبة وكما في A_{12}.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{21}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} +a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T$$

الآن نرجع المبدلة إلى المصفوفة لتكون المصفوفة المرافقة وكما يلي:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

مثال 14

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

Find the inverse matrices for:

$$a)\ B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

ولقــد تم إيجاد معكوس هذه المصفوفة باتباع الطريقة السريعة وكما لاحظنا ذلك في المثال (13) السابق.

أمــا الآن فســنقوم بإيجاد معكوس هذه المصفوفة مرة ثانية وباتباع الطريقة المطولة وكما يلي:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{def(B)}[adj(B)]$$

det (B) = (4) (8) – (10) (3) = 2

adj(B) = $((i+j)^{-1}\ Bij)^{T}$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = +8$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -10$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = +4$$

$$adj(B) = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-10}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{-3}{2} \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

d) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} adj(C)$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

(+ + + ; (0) (0) (0) ; (0) (12) (−2))

det (C) = (0 + 0 + 0) – (0 + 12 – 2) = -10

adj (C) = $[(-1)^{i+j} C_{ij}]^{-1}$

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = +(-6) = -6$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +(-2) = -2$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 = -2$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +4 = 4$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 = -4$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = +3 = 3$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 = -6$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +(+1) = 1$$

$$adj(C) = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad D^{-1} = \dfrac{1}{\det(D)} adjD$

$$\det(D) = \left| \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \right. \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

(1) (2) (3) → 12, 4, 48

(1) (2) (3) → 24, 3, 32

det (D) = (24 + 3 + 32) – (12 + 4 + 48) = -5

adj(D) = $[(-1)^{i+j} D_{ij}]^t$

$D_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +10$ $\qquad D_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -15$

$D_{13} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ $\qquad D_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$D_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +4$ $\qquad D_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$$D_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 \qquad D_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = +14$$

$$D_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-6) = +6$$

$$adj(D) = \begin{bmatrix} 10 & -15 & -5 \\ -4 & 4 & -1 \\ -9 & 14 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

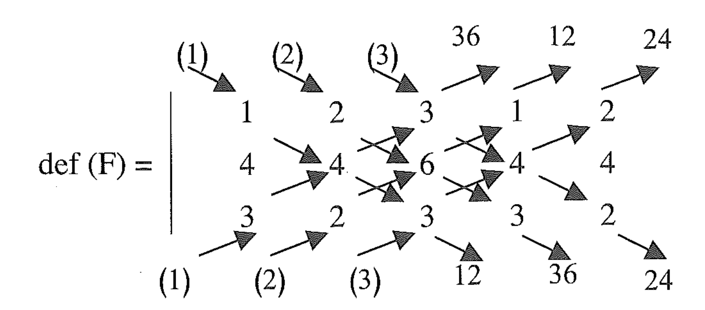
$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

d) $E = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \qquad E^{-1} = \dfrac{adj(E)}{\det(E)}$

$$\det(E) = (-3)(-6) - (9)(2) = +18 - 18 = 0$$

لا يمكـــن إيجاد المعكوسة للمصفوفة E وذلك لكون المحددة لهذه المصفوفة تساوي صفر.

e) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad F^{-1} = \dfrac{adj(F)}{\det(F)}$



$$\det(F) = (12 + 36 + 12) - (36 + 12 + 24) = 0$$

لا يمكن إيجاد المعكوس لهذه المصفوفة لكون محددتها تساوي صفراً.

وفي نهاية هذا المبحث لا بد من الإشارة إلى أن من أهم خصائص معكوس المصفوفة هو:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6-11 حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

Solving system of linear equations using matrices

يجب الإشارة في بداية هذا المبحث وقبل الحديث عن حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات هو الحديث عن تحويل الأنظمة من المعادلات الخطية من الشكل العام المتعارف عليه إلى أن تكون بشكل يستخدم المصفوفات كالآتي:

افرض أن لدينا m من المعادلات الخطية Linear simultaneous equations ولدينا n من المتغيرات variables أو المجاهيل unknowns بالشكل العام لنظام المعادلات الخطية System of linear equations كالآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\ a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\ a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\ a_{mn}x_n = b_m$$

والذي من الممكن كتابته بالصيغة التالية can be written in the form:

$$AX = b$$

حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad and \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

ويلاحظ هنا أن المصفوفة A تسمى مصفوفة المعاملات coefficient matrix وX تسمى مصفوفة المتغيرات variable matrix، أما b فتسمى مصفوفة الثوابت constant matrix.

وإذا كان عدد المعادلات n مساوياً لعدد المتغيرات (المجاهيل) n فيوجد هناك حل للنظام، والذي يمكن إيجاده بعدة طرق لحل المعادلات باستخدام المصفوفات سوف نتناول في هذا المبحث طريقتين فقط.

If # (equations) = # (variables) then the system has a solution that can be found using many methods to solve the system of equations using matrices, and we will consider just two of them.

1) حل المعادلات باستخدام طريقة معكوس المصفوفة والتي سيتم تناولها في الفقرة 6-11-1 القادمة.

2) حل المعادلات باستخدام طريقة كرامر والتي سيتم تناولها في الفقرة 6-11-2 القادمة.

6-11-1 حل المعادلات باستخدام طريقة معكوس المصفوفة:

Solving system of linear equations using the inverse

إذا كان $AX = b$ نظاماً للمعادلات الخطية المكون من n من المعادلات و n من المتغيرات، بحيث أن $|A| \neq 0$ فإن للنظام حل وحيد وهو:

$$X = A^{-1} b$$

If AX = b is a system of linear equations for n equations and n variables, such that $|A| \neq 0$. Then, there is a unique solution for this system, which is:

$$X = A^{-1} b$$

مثال 15

حل المعادلات التالية باستخدام طريقة معكوس المصفوفة:

Solve the following systems of equations using the inverse method:

a) $2X + 8Y = -4$

$X + 3Y = 5$

علينا أولاً كتابة النظام أعلاه بطريقة المصفوفات بالشكل AX = b كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (2)(3) - (1)(8) = -2$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -7 \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن x = 26 ، y = -7.

b) $2X_1 + 4X_2 + X_3 = 77$

$4X_1 + 3X_2 + 7X_3 = 114$

$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 48$

وبتحويل النظام إلى الشكل $AX = b$ لدينا:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وباتباع الخطوات السابقة لإيجاد A^{-1} فإن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -11/10 & 5/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -1 \end{bmatrix}$$

وأخيراً فإن:

$$X = A^{-1} b$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5 & -11/10 & 5/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن: $x_1 = 10$ ، $x_2 = 13$ وأن $x_3 = 5$.

6-11-2 حل المعادلات باستخدام طريقة كرامر:

Solving system of linear equations using Cramer's Rule:

إذا كـــان $AX = b$ نظاماً للمعادلات الخطية المكون من n من المعادلات و n من المتغيرات، بحيث أن $|A| \neq 0$ فإن للنظام حل وحيد هو:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} , \qquad i = 1 , 2 , 3 , \ldots , n$$

حـــيث أن $\det(A_i)$ هي محددة المصفوفة الناتجة من إبدال عناصر العمود i للمصفوفة A بعناصر العمود b.

If AX = b is a system of linear equations of n equations and n variables, such that $|A| \neq 0$. Then, the system has a unique solution, which is:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} , \qquad i = 1 , 2 , 3 , \ldots , n$$

where $\det(A_i)$ is the determinant of a matrix obtained by interchanging column i by the column b.

والحـــل بطريقة كرامر Cramer's يتطلب إيجاد محددات لمصفوفة معاملات المتغيـــرات عددها بقدر عدد المتغيرات زائد واحد. تكون المحددة الأولى هي التي تعـــتمد على معاملات المتغيرات جميعها أما المحددات الأخرى فمحددة كل متغير يتم باستبدال معاملات ذلك المتغير بالثوابت للمعادلات.

وفـــي حالة كون قيمة المحددة الأولى والتي تعتمد على معاملات المتغيرات جمـــيعها، وهي det(A)، صفراً فإننا نتوقف عن الحل لعدم وجوده بواسطة طريقة كرامـــر، أمـــا إذا كانت جميع المحددات تساوي صفراً فهناك عدد غير محدود من الحلول.

ولتوضـــيح هـــذه الطريقة سنقوم بحل المصفوفات السابقة والتي تم حلها في المثال (15) السابق بطريقة كرامر هذه المرة.

مثال 16

حل المعادلات التالية باستخدام طريقة كرامر:

Solve the following systems of equations using Cramer's Rule:

a) $3X - Y = 2$

$X + Y = 5$

وبتحويل النظام إلى الشكل $AX = b$ لدينا:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

والخطوة الأولى هنا هو إيجاد det(A)، حيث أن $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ كالآتي:

$$\det(A) = (3)(1) - (1)(-1) = 4$$

وهذا يعني وجود حل لهذه المعادلات باستخدام طريقة كريمر وذلك لكون المحدد الرئيسي الذي يعتمد على معاملات المتغيرات جميعها لا يساوي صفر بل يساوي 4. وهنا نستمر بإيجاد المحددات الأخرى لكل متغير محددة وذلك بتغير معاملات ذلك المتغير في عمود الثوابت وكما يلي:

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} .$$ تم تغيير معاملات X

$$\det(A_1) = (2)(1) - (5)(-1) = 7$$

$$\det(A_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} .$$ تم تغيير معاملات Y

$$\det(A_2) = (3)(5) - (1)(2) = 13$$

وبالتالي فإن قيم المتغيرات حسب صيغة كريمر التي هي كما يلي:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad , \quad x = \frac{7}{4} \quad , \quad y = \frac{13}{4}$$

b) $X_1 - X_2 + 0X_3 = 3$

$2X_1 - X_2 + 2X_3 = -2$

$3X_1 + X_2 + 0X_3 = 3$

وبتحويل النظام إلى الشكل $AX = b$ لدينا:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

المحددة الرئيسية:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\det(A_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 12$$

$$\det(A_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

ولذلك فإن قيم المتغيرات هو كما يلي:

$$X_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$X_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$X3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

c) $2X - 3Y + Z = 5$

$X + 2Y - Z = 7$

$3X - 9Y + 3Z = 4$

وبتحويل النظام إلى الشكل $AX = b$ لدينا:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & 12 & 18 & -9 \\ \det(A) = & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ & 6 & -9 & 3 & 6 & -9 \\ & & & 12 & 18 & -9 \end{array}$$

$$\det(A) = (12 + 18 - 9) - (12 + 18 - 9) = 0$$

وهــنا نســتطيع أن نقــول أنه لا يوجد حل لهذه المعادلات باستخدام طريقة كرامر وذلك لكون المحددة الرئيسية، $\det(A) = 0$.

أسئلة الفصل السادس
Exercises for chapter Sex

حــل الأسئلة التالية حسب نوعية السؤال من جمع أو طرح مصفوفتين أو ضرب المصفوفة في ثابت للأسئلة (1-4):

Perform the indicated operations and simplify:

1) $4\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

2) $-4\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

4) $5\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

حدد قيم المتغيرات للمصفوفات المتساوية التالية للأسئلة (5-8):

Determine the values of the variables:

5) $\begin{bmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 4 & y-1 & 5 \\ u & -1 & z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 & t+1 & 3 \\ v+1 & -3 & 5 \\ -4 & w-1 & 2z-1 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & x \\ y & 3 & 4 \\ 2 & z & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 6 \\ 5 & 3 & 4 \\ u & 2 & v \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 3 & 4 & x \\ u & y & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 3 & 4 \\ 2 & -1 & y \\ 1 & z & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & v+1 \\ 5 & w-2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

8) $3\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & y & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 & t & 0 \\ z & 1 & -1 \\ u & 2 & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w-4 & 1 & -v \\ 4 & 2u & 2v+y \\ -1 & x+7 & 12 \end{bmatrix}$

9) الجانب التطبيقي: مصفوفات الإنتاج (Production matrices):

معمل لإنتاج الملابس يصنع قمصان بالألوان الأحمر، الأسود والأبيض للأطفال والنساء والرجال. إمكانية الإنتاج (بالألف) لخطة عمان كما موضح للمصفوفة التالية:

A shirt firm makes Red, black, and white shirts for children, women, and men. The production capacity (in thousand) at Amman plant is given by the following matrix:

	Men's	*Women's*	*Children's*
Red	20	26	14
Black	35	16	12
White	10	22	20

22) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

أوجد معكوس المصفوفة إن أمكن للأسئلة (23-25):

Find the inverse matrix of the following matrices. If possible or if it exists:

23) $A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

24) $B \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

25) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

حل المعادلات التالية باستخدام طريقة كريمر للأسئلة (26-29):

Use Cramer's vale to solve the following system of equation:

26) $2X_1 - X_2 - 3 = 0$
$3X_1 + 2X_2 - 1 = 0$

27) $X_1 + 3X_2 - 7 = 0$
$4X_1 + 5X_2 = 14$

28) $3X_1 - 2X_2 + X_3 = 4$
$2X_1 + 3X_2 - X_3 = 0$
$X_1 + X_2 + X_3 = -1$

29) $-X_1 + 2X_2 + 5X_3 = -5$
$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 9$
$2X_1 - X_2 + X_3 = 2$

حل المعادلات التالية باستخدام طريقة معكوس المصفوفة للأسئلة (30-33):

Use inverse matrix to solve the following systems of equations:

30) $2X_1 - 4X_2 = -3$
$3X_1 + 5X_2 = 1$

31) $3X_1 - 2X_2 - 4 = 0$
$-4X_1 + 3X_2 + 5 = 0$

32) $X_1 - X_2 + X_3 = 2$
$-X_1 + X_2 + X_3 = 4$
$X_1 + X_2 - X_3 = 0$

33) $2X_1 - X_2 - X_3 = 3$
$X_1 - 2X_2 + X_3 = 6$
$X_1 + X_2 - 2X_3 = -3$

وتطبيقاتها
في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل السابع

المشتقات وتطبيقاتها

وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل السادس
المشتقــات وتطبيقاتهــا
The Derivatives and its applications

7-1 مقدمة Introduction:

سـنتناول فـي هـذا الفصل أحد أهم المفاهيم الرياضية ألا وهي المشتقات Derivatives بجميع أنواعها، وتبدأ الدراسة من عملية تعريف مفهوم المشتقة للدالة إلـى قـواعد الاشـتقاق اللازمة لحساب المشتقات لبعض من الدوال المعروفة، ثم نشـرح التفسير الهندسي geometric interpretation والتطبيقات العملية applied examples لمفهوم المشتقة.

وكذلك سنتناول بحث وإيجاد المشتقات لجمع وطرح الدوال وكذلك المشتقات المرفوعة إلى قوى Derivatives of power functions ومشتقات الضرب والقسمة وأيضـاً مشـتقات الـدوال الأسية واللوغاريتمية. وكذلك سنتناول تطبيقات التحليل الحـدي ومـنها الكلفة الحدية marginal cost والعائد الحدي marginal revenue وكـذلك الربح الحدي marginal profit. وكذلك سيتضمن الفصل العديد من الأمثلة examples والأمـثلة التطبيقـية applied examples وأيضـاً سيحتوي الفصل في نهايته على العديد من الأسئلة exercises.

وبذلك فإن هذا الفصل سيتضمن المباحث التالية: المبحث 2-7 المشتقة للدالة The Derivative of a function والمـبحث 3-7 التحلـيل الهندسي Geometric Interpretation والمبحث 4-7 قواعد الاشتقاق Derivatives Rules والمبحث 5-7 الجانب التطبيقي للمشتقات: التحليل الحدي Applications for the Derivatives: Marginal Analysis.

7-2 المشتقة للدالة The Derivative of a function:

تعتبـر المشـتقة derivative للدالــة من المفاهيم الرياضية المهمة والأوسع استخداماً في الدراسات المختلفة وفي الدراسات الاقتصادية خاصة، وقد تطرقنا في

الفصـــول السابقة إلى ميل الخط المستقيم The slope of a straight line والذي تم تعـــريفه كنســبة تغير المتغير المعتمد y على نسبة تغير المتغير المستقل x وحدة واحدة، والذي يرمز له بالرمز m، ويمكن تعريفه كالآتي:

$$m = \text{slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

حيث أن: Δx يمثل مقدار التغير في قيمة المتغير المستقل x.

Δy يمثل مقدار التغير في قيمة المتغير المعتمد y.

أمـــا Δ فهو الحرف الإغريقي الذي يشير إلى مقدار التغير والذي يسمى دلتا delta.

تســتخدم المشــتقات لقــياس معدلات التغير وتعرف على أنها قيم الغاية أو النهاية limit لمعدلات التغير وبواسطتها يمكن دراسة الحساسية التي تتأثر بها الدالة عـــندما يطـــرأ أي تغيير على المتغير المستقل x فمثلاً من مصلحة رب العمل أن يعـــرف التغير في عدد وحدات البيع عندما يتغير السعر. وهناك العديد من الأمثلة التـــي تعـــتمد علـــى تطبيق المشتقة ومنها الزيادة في كلفة الإنتاج نتيجة الزيادة أو التغيـــر في الوحدات المنتجة أو التغير في الأعداد السكانية مع التقدم في الزمن كما سيتضح من خلال المثال التالي:

مثال 1

لفتـــرة عشر سنوات (1990–2000) وجد أن الدالة التالية للزيادة السكانية تصح للسكان في العراق وهي كالآتي:

$$P(t) = 1 + 0.02\,t + 0.002\,t^2$$

حيث أن p هو عدد الملايين millions من السكان.

وأن t هو مقياس السنين year.

أوجد نسبة زيادة النمو السكاني للعراق منذ بداية 1998.

During the 10 year period from 1990 to 2000, the Iraqi population was found to be given by the formula.

$$P(t) = 1 + 0.0\,t + 0.002\,t^2$$

Find the rate of growth at the beginning of 1998.

لإيجــاد نسبة النمو السكاني للعراق في السنة 1998 والتي تعني $t = 8$ علينا إيجاد التغير أو الزيادة في قيمة p بين $t = 8$ و $t = 8 + \Delta t$ كالآتي:

$$\Delta t = p\,(8 + \Delta t) - p\,(8)$$
$$= [1 + 0.02\,(8 + \Delta t) + 0.002\,(8 + \Delta t)^2] - [1 + 0.02\,(8) + 0.002\,(8)^2]$$
$$= 0.052\,\Delta t + 0.004\,(\Delta t)^2$$

وهذا يعني أن معدل نسبة النمو السكاني لهذه الفترة الزمنية يمكن حسابه كما يلي:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 0.052 + 0.004\Delta t$$

وبأخذ الغاية أو النهاية limit عندما $\Delta t \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \;(0.052 + 0.004\Delta t) = 0.052$$

ولــذلك وعند بداية السنة 1998 نسبة النمو السكاني في العراق هو 0.052 مليون لكل سنة، أي أن العدد هو 52000 لكل سنة.

نسبة التغير في السكان للمثال السابق هي حالة واحدة من مشتقة الدالة والتي سنقوم الآن بتعريفها كالآتي:

تعريف المشتقة Derivative definition:

افــرض أن الدالــة $y = f(x)$ المعينة والمستمرة في مجال معين $[x_1\ ,\ x_2]$. ولنخــتار إحــدى نقاط هذا المجال ونجعل المتغير x يأخذ تغيراً طفيفاً مقداره Δx، بمعنى آخر، ننتقل من النقطة x إلى النقطة $x + \Delta x$ ضمن المجال المفروض. عند ذلــك تنتقل قيمة الدالة من $f(x)$ إلى $f(x+\Delta x)$، ويكون التغير الذي طرأ على قيمة الدالة هو $f(x+\Delta x) - f(x)$. وأن مشتقة الدالة في النقطة x، ونرمز لها بالرمز $f'(x)$ أو $\frac{df}{dx}$، هو:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

let the given function y = f(x) be well defined and continuous on a given interval. Then, the derivative of y with respect to x, denoted by f'(x) of $\frac{dy}{dx}$, is defined t be:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فـــإذا كانت النهاية موجودة قلنا أن الدالة f(x) قابلة للاشتقاق في نقطة أو في مجال معين.

وعـــادة ما يطلق على طريقة إيجاد المشتقة بالشكل أعلاه هو إيجاد المشتقة بطريقة التعريف finding the derivative by definition.

وكـــذلك تعـــرف المشتقة باسم المعامل التفاضلي differential coefficient وعملية حساب المشتقة للدالة تدعى التفاضل differentiation.

ويلاحظ أن هناك أسماء عديدة لمشتقة الدالة f(x)، ويرمز لها بالرموز التالي following symbols:

$$\frac{df}{dx} \ , \ \frac{dy}{dx} \ , \ \frac{d}{dx}(f) \ , \ \frac{d}{dx}(y) \ , \ f'(x) \ , \ y' \ , \ D_x f \ , \ and \ \ D_x y$$

وجمـــيع هذه التعريفات والرموز لها نفس المعنى والمتمثل بمشتقة المتغير y (أو f) بالنسبة للمتغير x. The derivative of y (or f) with respect to x.

وبنفس الأسلوب يمكن تعريف $\frac{dc}{da}$ أنه مشتقة الدالة C أو المتغير المعتمد C بالنسبة للمتغير المستقل a، وهكذا لجميع مشتقات الدوال.

مثال 2

أوجد المشتقة $f'(x)$ بطريقة التعريف للدالة:

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 4$$

وقدر قيمة المشتقة عند $x = 3$ ثم $x = -3$

Find $f'(x)$ for the above function and evaluate $f'(3)$ and $f'(-3)$

بالرجوع لتعريف المشتقة وكما رأينا تطبيق ذلك في المثال (1) السابق لدينا:

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 4$$

$$f(x + \Delta x) = 4\,(x + \Delta x)^2 - 3\,(x + \Delta x) + 4$$

وبالتالي فإن:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [4\,(x + \Delta x)^2 - 3\,(x + \Delta x) + 4] - (4x^2 - 3x + 4)$$

$$= \cancel{4x^2} + 8x\,\Delta x + 4\,(\Delta x)^2 - \cancel{3x} - 3\Delta x + \cancel{4} - \cancel{4x^2} + \cancel{3x} - \cancel{4}$$

$$= 8x\,\Delta x - 3\Delta x + 4\,(\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx نحصل على:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 8x - 3 + 4\Delta x$$

وبأخذ النهاية أو الغاية limit عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على المشتقة $f'(x)$ كالآتي:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 8x - 3$$

وعن قيمة المشتقة عندما $x = 3$ ثم عندما $x = -3$ لدينا:

$$f'(3) = (8)\,(3) - 3 = 24 - 3 = 21$$

$$f'(-3) = (8)\,(-3) - 3 = -24 - 3 = -27$$

7-3 التحليل الهندسي Geometric Interpretation:

لاحظنا في المثال (1) عندما يكون المتغير المستقل في الدالة $y = f(t)$ يمثل الوقت Time في المشتقة $\frac{dy}{dt}$ تعطي نسبة تغير rate of change y. وكما في المثال (1)، $P = f(t)$ يمثل الحجم السكاني للتغير في الوقت من سنة إلى أخرى، إذن $\frac{dp}{dt}$ يعطي نسبة الزيادة في حجم السكان، وبنفس أسلوب هذا التطبيق للمشتقات derivatives، هناك استخدامات هندسية حقيقية geometrical significance للمشتقات.

افرض أن A و B هما نقطتان Two points ولتكن احداثياتهما (x و f(x)) و(f(x+Δx) و x + Δx) على رسم الدالة $y = f(X)$.

وبالتالي فإن النسبة والتي تعرف كما يلي:

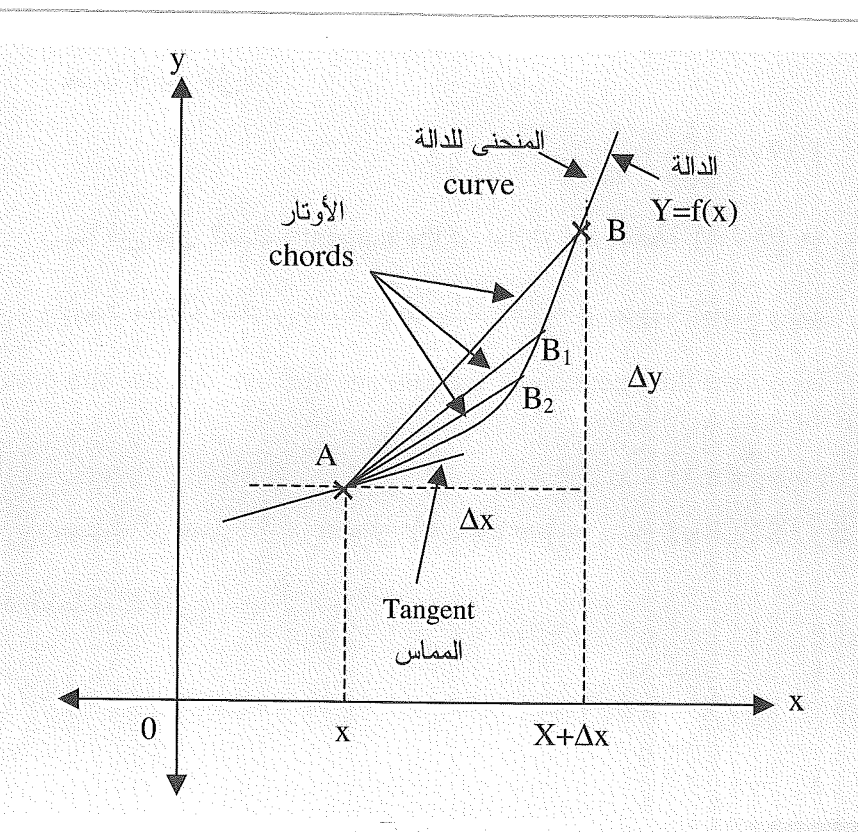
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تمثل ميل الوتر slope of chord AB. وكلما يقل طول الوتر chord وتقترب النقطتان B و A من بعضهما يصبح الوتر chord تقريباً مماس tangent، أي عندما $\Delta x \to 0$ يكون ميل الوتر slope of chord قريباً جداً أو مساوياً إلى ميل المماس the slope of the tangent line عند النقطة A.

لذلك:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

يمثل ميل خط المماس tangent line للدالة $y = f(x)$ عند النقطة A بالإحداثيات (x , f(x)). لاحظ الشكل (1) فكلما كان منحنى الدالة $y = f(x)$ قريباً من الاستقامة smooth عند النقطة A، عندها نستطيع رسم مماس غير عمودي can draw a nonvertical tangent عند النقطة A وتكون الغاية قد تحققت the limit will exist.



الشكل رقم (1)

المعنى الهندسي للمشتقة

مثال 3

أوجـد مـيل المماس ومعادلة خط المماس لرسم الدالة $Y = \sqrt{x}$ عند النقطة (4 ، 9) وكذلك النقطة $\left(\frac{1}{6} , \frac{1}{9}\right)$.

Find the slope of the tangent and the equation of the tangent line to the graph $Y = \sqrt{x}$ at the above points.

لدينا الدالة المعروفة $f(x) = \sqrt{x}$ وباستخدام تعريف المشتقة نجد أن المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

وعندما x = 9 فإن:

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

ولهذا فإن ميل المماس slope of the tangent عند النقطة (4 ، 9) هو $\frac{1}{6}$

ولإيجاد معادلة المماس نستطيع استخدام معادلة أو صيغة النقطة والميل.

To obtain the equation of the tangent line, we can use the point – slope formula as follows:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

وحيث أن الميل $m_1 = \frac{1}{6}$ وأن (4 ، 9) = (x_1 , y_1) لاحظ الشكل رقم (2)

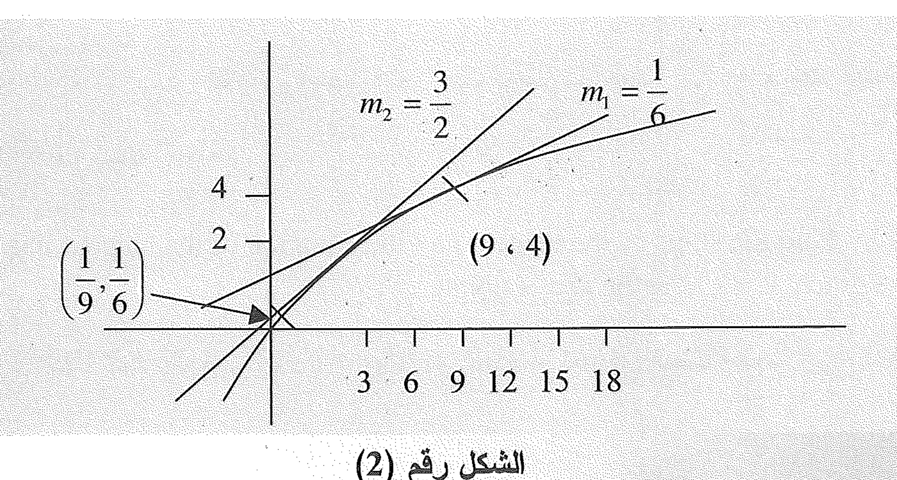
ونجد المعادلة كالآتي:

$$y - 4 = \frac{1}{6}(x - 9)$$

$$y - 4 = \frac{1}{6}x - \frac{9}{6}$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{15}{6}$$

وهي معادلة المماس المطلوب.



الشكل رقم (2)

رسم معطيات المثال (3)

أما عندما يكون $x = \frac{1}{9}$:

$$f'(\frac{1}{9}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{1}{(2)(\frac{1}{3})} = \frac{3}{2}$$

ولـــذلك فإن ميل المماس عند النقطة $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right)$ يساوي $m_2 = \frac{3}{2}$ لاحظ الشكل (2) أعلاه.

ومن صيغة معادلة النقطة والميل from the point – slope formula نجد أن المعادلة المطلوبة هي:

$$y - \frac{1}{6} = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{9})$$

$$y - \frac{1}{6} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{3}{2}x$$

وتمثل معادلة المماس المطلوبة عند النقطة $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right)$.

7.4 قواعد الاشتقاق Derivatives Rules:

لاحظـــنا أن استخدام طريقة التعريف لإيجاد مشتقة الدوال تتضمن العديد من الخطـــوات والتـــي تكـــون غالبيتها صعبة التعامل وتحتاج إلى الكثير من العمليات الجبـــرية. وللتغلب على مثل هذه الصعوبات في إيجاد مشتقات الدوال، وخصوصاً البســـيطة والأكثر استخداماً والأسهل تعاملاً منها، هو استخدام ما يسمى بقواعد أو قوانـــين الاشـــتقاق derivatives rules. هـــذه القواعد أو القوانين هي في الحقيقة نظريات لها براهين محددة لن يتم الدخول في تفاصيلها في هذا الكتاب، وذلك لأننا نود التأكيد في هذا الكتاب على تطبيق هذه القواعد والاستعانة بها لإيجاد المشتقات

أكثـــر مـــن الدخـــول فـــي التفاصيل الرياضية البعيدة عن هدف الكتاب في الوقت الحاضر.

وسيتم عرض هذه القواعد بالشكل البسيط التالي:

1) مشتقة الثابت تساوي صفر $\frac{dy}{dx} = zero$ **:Let y = c, then**

وهـــذا واضـــح جداً من التحليل الهندسي لرسم الدالة الثابتة، حيث أنه عندما يكون y ثابت فسوف يكون المستقيم موازي إلى الإحداثي السيني x-axis وهذا يعني أن مـــيله يســـاوي صفر. وبما أن المشتقة هي الميل فلذلك فإن المشتقة للثابت هي صفر.

2) مشتقة أو صيغة القوة أو الأس The power formula:

let y = x^n , then $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

وذلك يعني أنه إذا كانت قوة المتغير x كمية ثابتة موجبة positive constant power نطرح واحد من القوة إلى المتغير x ونضرب المتغير x في القوة قبل طرح الواحد.

We decrease the power of x by 1 and multiply by the original exponent of x.

والمثال التالي لتوضيح ذلك:

مثال 4

أوجد مشتقة الدوال التالية:

Find $\frac{dy}{dx}$ for the following:

a) $y = x^5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

b) $y = x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{1-1} = x^0 = 1$

c) $y = \sqrt{x}$ $\qquad y = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d) $y = x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y = \frac{1}{x^2}$ $\qquad y = x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad y = x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

3) مشتقة الدالة y = cx حيث أن c ثابت و x متغير:

Let y = cx then if cx is differentiable function of x, and c is a contant, then $\frac{dy}{dx} = c\frac{dy}{dx}$

ويعنـــي ذلك أن مشتقة ضرب ثابت في دالة للمتغير x هو ضرب الثابت في مشتقة تلك الدالة.

The derivative of the product of a constant by a function is the product of the constant by the derivative of the function.

والمثال التالي لتوضيح ذلك:

مثال 5

أوجد مشتقة الدوال التالية:

Find $\frac{dy}{dx}$ for the following:

a) $y = cx^n$ $\qquad \frac{dy}{dx} = cnx^{n-1}$

b) $y = 10x^4$ $\qquad \frac{dy}{dx} = (10)(4)x^3 = 40x^3$

c) $y = \frac{5}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-5}{x^2}$

d) $y = 2\sqrt{x}$ $\qquad y = 2x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = (2)(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

4) المشتقة للجمع والطرح لأكثر من دالة قابلة للاشتقاق:

If u(x) and v(x) are two differentiable functions of x, then

$$f(x) = u \mp v$$

and $f'(x) = \frac{du}{dx} \mp \frac{dv}{dx}$

والمثال التالي لتوضح هذه القاعدة:

مثال 6

أوجد مشتقة الدوال التالية :Find $f'(x)$ for the following

a) $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

b) $y = 4x^3 + \frac{4}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 8x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - \frac{8}{x^3}$$

c) $y = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 10$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 10x + 7$$

d) $y = \frac{7x^4 - 5x^3 + 5}{3x^2}$

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} + \frac{5}{3}x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{3} - 5x^{-4}$$

5) مشتقة الضرب Product Rule:

لنفرض أن u(x) و v(x) دالتين قابلتان للاشتقاق بالنسبة للمتغير x

If u(x) and v(x) are any two differentiable functions of x, then

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

أو تكتب المشتقة للضرب بالأسلوب الآخر التالي:

$$(uv)' = uv' + vu'$$

وتعنـــي أن مشـــتقة حاصل ضرب دالتان هو الدالة الأولى في مشتقة الدالة الثانية مضافاً إليه (زائد) الدالة الثانية في مشتقة الدالة الأولى.

In words, the derivative of the product of two functions is equal to the first function times the derivative of the second plus the second function times the derivative of the first.

والمثال التالي لتوضيح هذه القاعدة:

مثال 7

أوجد المشتقة للدوال $f'(x)$ إذا كانت الدوال:

Find $f'(x)$ if

a) $f(x) = (4x^3 - 2x)(3x^2 + 4x + 7)$

b) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2)$

a) $f(x) = uv$

لإيجاد المشتقة للفرع (a) يمكن أن تكتب الدالة بحالة الضرب بافتراض أن:

$u = 4x^3 - 2x$ و $v = 3x^2 + 4x + 7$

وبتطبيق صيغة الضرب نجد:

$u' = 12x^2 - 2$ و $v' = 6x + 4$

وبالتالي فإن:

$$f'(x) = uv' + vu'$$

$$= (4x^3 - 2x)(6x + 4) + (3x^2 + 4x + 7)(12x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 60x^4 + 64x^3 + 66x^2 - 16x - 14$$

هناك طريقة ثانية لإيجاد مشتقة الضرب هو أن نضرب الدالتين أولاً ثم نقوم بعملية المشتقة كما في الأسلوب والأمثلة السابقة وكما يلي:

$$f(x) = 12x^5 + 16x^4 + 22x^3 - 8x^2 + 14x$$

$$f'(x) = 60x^4 + 64x^3 + 66x^2 - 16x - 14$$

وهذه هي نفس النتيجة.

ولإيجاد مشتقة الفرع (b) لدينا

b) $f(x) = (2\sqrt{x}+1)(x^2+3)$

نستخدم قاعدة الضرب لحل المسألة وبافتراض أن:

$$u = 2\sqrt{x}+1 = 2x^{\frac{1}{2}}+1 \quad , \quad v = x^2+3$$

إذن المشتقة هي:

$$u' = x^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad v' = 2x$$

ولذلك فالمشتقة كما يلي:

$$f'(x) = uv' + vu'$$

$$= (2x^{\frac{1}{2}}+1)(2x) + (x^2+3)(x^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 4x^{\frac{3}{2}} + 2x + x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 5x^{\frac{3}{2}} + 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

وأخيراً لإيجاد مشتقة الفرع (c) لدينا:

c) $f(x) = (3x^2+2x+1)(x^2-2)$

وبتطبيق القاعدة مباشرة لدينا:

$$f'(x) = (3x^2+2x+1)(2x) + (x^2-2)(6x+2)$$

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 10x - 4$$

6) مشتقة القسمة Quotient Rule:

إذا كانت u(x) وv(x) قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى x

If u(x) and v(x) are differentiable functions of x, then

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

أو يمكن أن نضعها في الصيغة التالية:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{/} = \frac{vu^{/} - uv^{/}}{v^2}$$

وتعني أن مشتقة القسمة هو ضرب دالة المقام في مشتقة البسط مطروحاً منه (ناقص) مشتقة المقام في دالة البسط مقسوم على مربع المقام.

والمثالين التاليين لتوضيح قاعدة القسمة.

مثال 8

أوجد المشتقة للدوال التالية مستخدماً صيغة مشتقة القسمة.

Use the quotient rule to differentiate the following functions:

$$a)\ \ f(x) = \frac{2x+5}{2x-5} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3} \qquad c)\ \ f(x) = \frac{x}{x-1}$$

a) $f^{/}(x) = \dfrac{(2x-5)(2)-(2x+5)(2)}{(2x-5)^2} = \dfrac{-20}{(2x-5)^2}$

b) $f^{/}(x) = \dfrac{(1+x^3)(-3x^2)-(1-x^3)(3x^2)}{(1+x^3)^2} = \dfrac{-6x^2}{(1+x^3)^2}$

c) $f^{/}(x) = \dfrac{(x-1)^2.1-x.1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

مثال 9

أوجد المشتقة للدالة التالية مستخدماً دالة القسمة:

Find the derivative of the following function by using the Quotient Rule:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-2x)}{x-1}$$

نفرض أن:

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

وأن المشتقة تكون:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

حيث أن:

$$v' = 1 \quad , \quad u' = (x+1)(3x^2 - 2) + (x^3 - 2x).1$$

$$u' = 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2$$

إذن المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(4x^3 + 3x^2 - 4x - 2) - (x+1)(x^3 - 2x).1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 2}{(x-1)^2}$$

7) مشتقة قاعدة السلسلة The Chain Rule:

إذا كانــت y دالة بالنسبة إلى u وأن u هو دالة إلى x إذن تكون المشتقة كما يلي:

If y is a function of u and u is function of x, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

وتستخدم هذه المشتقة في حالة الدوال المعقدة.

Using it to differentiate a complicated function.

مثال 10

أوجـد المشتقة للدوال التالية مستخدماً صيغة السلسلة وحدد كيفية تحليل كل دالة.

Find the derivative of the following functions, use the chain rule, indicate how each function is decomposed:

a) $y = (1 - x^3)^4$

b) $y = \sqrt{4x + 4}$

c) $y = (x^3 + 1)^6$

لاستخدام صيغة السلسلة نستطيع تحليل كل دالة كما يلي:

a) $y = (1 - x^3)^4$

افرض أن $y = u^4$ عندما $u = 1 - x^3$ ، لذلك فإن المشتقة:

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = -3x^2$$

وعليه باستخدام صيغة السلسلة Chain Rule لدينا ما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (4u^3).(-3x^2)$$

$$= 4(1 - x^3)^3(-3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -12x^2(1 - x^3)$$

b) $y = \sqrt{4x + 4} = (4x + 4)^{\frac{1}{2}}$

افرض أن $y = u^{\frac{1}{2}}$ عندما $u = 4x + 4$ ، لذلك فإن المشتقة:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \qquad , \qquad \frac{du}{dx} = 4$$

وعليه باستخدام صيغة السلسلة chain rule لدينا ما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.4$$

$$= \frac{1}{2}(4x + 4)^{-\frac{1}{2}}.4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(4x + 4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 4}}$$

c) $y = (x^3 + 1)^6$

افرض أن $y = u^6$ عندما $u = x^3 + 1$ ، لذلك فإن المشتقة:

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

وعليه باستخدام صيغة مشتقة السلسلة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 6u^5 . 3x^2$$

$$= 6(x^3 + 1)^5 . 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -18x^2 (x^3 + 1)^5$$

ويمكن وضع صيغة مشتقة دالة السلسلة كما يلي:

1) If $y = [u(x)]^n$ then $\left[\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}\right]$

2) If y = f (inside), then $\frac{dy}{dx} = f^{\prime}(inside)$. **(derivative of inside with respect to x).**

3) If y = $(inside)^n$, then $\frac{dy}{dx} = n(inside)^{n-1}$. **(derivative of inside with respect to x).**

تعتبر الصيغ الأخيرة طريقة مباشرة لإيجاد مشتقة الدالة بصيغة السلسلة وسيتم توضيح ذلك بالمثال التالي:

مثال 11

أوجد المشتقة للدوال التالية مستخدماً صيغة السلسلة Chain Rule:

Given the following functions, find $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = (2x^4 + 1)^3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+10)}}$

c) $y = (x^2 + 3x - 10)(3 - x^2)^3$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$

يمكن التطبيق المباشر لصيغة السلسلة كالآتي:

a) $y = (2x^4 + 1)^3$, $\dfrac{dy}{dx} = 3(inside)^2 . \dfrac{d}{dx}(inside)$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^2+1)^2 . \frac{d}{dx}(2x^4+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^4+1)^2 . 8x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 24x^3(2x^4+1)^2$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+10)}} = (x^2+10)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+10)^{-\frac{1}{2}-1} . \frac{d}{dx}(x^2+10)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+10)^{-\frac{3}{2}} . 2x$$

$$f'(x) = -x(x^2+10)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x^2-10)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+10)^3}}$$

c) $y = (x^2 + 3x - 10)(3 - x^2)^3$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+3x-10)3(3-x^2)^2.(-2x) + (3-x^2)^3(2x+3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -6x(3-x^2)^2(x^2+3x-10) + (3-x^2)^3(2x+3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (3-x^2)^2\left[-6x(x^2+3x-10) + (3-x^2)(2x+3)\right]$$

d) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3.\frac{(x+1).1-(x-1).1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3.\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 8\frac{(x-1)^3}{(x+1)^5}$$

8) مشتقة الدالة الأسية Derivative of Exponential function:

Iet $y = e^x$, then $\frac{dy}{dx} = e^x.1 = e^x$

مشتقة الدالة الأسية هي الدالة الأسية نفسها مضروبة بمشتقة الأس.

والمثال التالي لتوضيح مشتقة الدالة الأسية:

مثال 12

أوجد المشتقة للدوال الأسية التالية:

Find the derivatives for the following exponential functions:

a) $y = xe^x$

b) $y = e^{x^4}$

c) $y = x^3 e^x$

d) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

e) $y = e^{3x}$

f) $y = e^{x^3 - 3x^2}$

g) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

لإيجاد المشتقات لدينا:

a) $y = xe^x$

افرض أن $y = uv$ وأن $u = x$, $v = e^x$ ، لذلك فإن:

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = u.v' + v.u'$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x.1 = (x+1)e^x$$

b) $y = e^{x^4}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^4}.4x^3 = 4x^3 e^{x^4}$$

c) $y = x^3.e^x$

$$\frac{dy}{dx} = x^3.e^x + e^x.3x^2 = (x^3 + 3x^2)e^x$$

d) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^x + e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

e) $y = e^{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

f) $y = e^{x^3 - 3x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 6x)e^{x^3 - 3x^2}$$

g) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = x.e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2}) + e^{\frac{1}{x}}$$

$$= -x^{-1}e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} = (1 - x^{-1})e^{\frac{1}{x}} = (1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$$

9) مشتقة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

Derivative of the logarithmic function

Let y = lnx, then $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$

مشـــتقة الدالـــة اللوغاريتمية هو واحد على الدالة ومن ثم يضرب الناتج في مشتقة الدالة. والمثال التالي لتوضيح مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

مثال 13

أوجد مشتقة الدوال اللوغاريتمية التالية:

a) $y = \ln(x + c)$

b) $y = \ln(x^4 + 2x - 10)$

c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

d) $y = x \ln x$

e) $y = x \ln(x+1)$

f) $y = \frac{x}{\ln x}$

g) $y = \log_{10} x^2$

لإيجاد المشتقات لدينا:

a) $y = \ln(x + c)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+c)}.1 = \frac{1}{x+c}$$

b) $y = \ln(x^4 + 2x - 10)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^4+2x-10)}.(4x^3+2) = \frac{4x^3+2}{(x^4+2x-10)}$$

c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

d) $y = x \ln x$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{x} + \ln x(1) = 1 + \ln x$$

e) $y = x \ln(x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{(x+1)} + \ln(x+1)(1) = \frac{x}{(x+1)} + \ln(x+1)$$

f) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x - \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

g) $y = \log_{10} x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x^2}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}.\frac{1}{x^2}.2x = \frac{2x}{x^2 \ln 10}$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية يجب أن يوضع أولاً بصيغة اللوغاريتم الطبيعي

The common logarithm (log) to be expressed in terms of a natural logarithm (ln) before it could be differentiated.

وتطبق هذه الصيغة لأي أساس للدالة اللوغاريتمية فيجب أن تحول إلى لوغاريتم طبيعي ومن ثم تشتق الدالة.

10) المشتقات العليا Highter Derivatives:

نستطيع أن نشتق الدالة لأكثر من مرة إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق وتسمى المشتقة الأولى والمشتقة الثاني والمشتقة الثالثة وإلى آخره إلى أعلى درجة ممكنة.

Let y = f(x) be a given function of x with derivative dy/dx = $f'(x)$. In full, we call this the first derivative of y with respect to x. If $f'(x)$ is a differentiable function of x, its derivative is a differentiable function of x, its derivative is called the second derivative of y with respect to x. If the second derivative is a differentiable function of x, its derivative is called the third derivative of y, and so on.

ويمكن أن نرمز إلى المشتقات الأولى والثانية والثالثة وإلى أعلى مرتبة كما يلي:

The first and all higher – order derivatives of y with respect to x are generally denoted by one of the following types of notation:

$$\frac{dy}{dx} \;,\; \frac{d^2y}{dx^2} \;,\; \frac{d^3y}{dx^3} \;,\; \dots \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$y' \;,\; y'' \;,\; y''' \;,\; \dots \quad y^{(n)}$$

$$f'(x) \;,\; f''(x) \;,\; f'''(x) \;,\; \dots \quad f^{(n)}(x)$$

والمثال التالي لتوضيح معنى المشتقات من درجات أعلى:

مثال 14

أوجد المشتقة الأولى والثانية وإلى أعلى درجة للدوال التالية:

Find the first and second, and higher-order derivatives of:

a) $y = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 100$

b) $f(x) = x^4$

c) $y = x^2 \ln x$

لإيجاد المشتقات لدينا:

a) $y = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 100$

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 8x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3 - 36x^2 + 30x - 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120x^2 - 72x + 30$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 240x - 72$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 240$$

ونلاحظ هنا بأن المشتقة السادسة وجميع المشتقات من الدرجات الأعلى جميعها صفر.

b) $f(x) = 4x^4$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

ونلاحـــظ هـــنا بأن المشتقة الخامسة وجميع المشتقات من الدرجات الأعلى جميعها صفر.

c) $y = x^2 \ln x$

$$y' = x^2.\ \frac{1}{x} + \ln x.2x$$

$$y'' = x^2(-x^{-2}) + x^{-1}(2x) + \ln x(2) + 2\not{x}\frac{1}{\not{x}}$$

$$= -1 + 2 + 2\ln x + 2$$

$$y'' = 3 + 2\ln x$$

ونلاحظ هنا بأننا يمكننا الاستمرار بعملية الاشتقاق إلى درجات عليا.

7.5 الجانب التطبيقي للمشتقات: التحليل الحدي

Applications for the Derivatives: Marginal Analysis

هـــناك العديـــد مـــن تطبيقات المشتقات في مجال إدارة الأعمال والاقتصاد applications in business and economics لإعـــداد أو لبـــناء مـــا يسمى النسب الحدية marginal rates.

في هذا المجال كلمة حدية marginal تستخدم لتعني المشتقة derivative وهو نسبة التغير rate of change والأمثلة التالية توضح عملية تطبيق المشتقات في هذه المجالات.

1) الكلفة الحدية Marginal Cost:

افرض أن أحد المصنعين لأحد المواد وجد أنه لغرض صنع x من الوحدات في الأسبوع، الكلفة الكلية في عدد الدولارات the total cost in dollars تتمثل بدالة الكلفة التالية ($C = 400 + 0.4\ x^2$). وإذا كان عدد الوحدات المنتجة في الأسبوع هو 200 فإن الكلفة كما يلي ($C = 400 + 0.4 \times (200)^2 = 2000$) ومعدل إنتاج الوحدة الواحدة average cost puritan هو $\frac{2000}{200} = 10$ دولار.

والآن افرض أن المصنع قرر تغيير خطة الإنتاج من 200 إلى ($200+\Delta x$) وحـــدة في الأسبوع. حيث أن Δx هو التغير في زيادة الإنتاج لعدد الوحدات. إذن الكلفة سوف تكون:

$$C + \Delta C = 400 + 0.04\ (200 + \Delta x)^2$$
$$= 400 + 0.04\ [40000 + 400\ \Delta x + (\Delta x)^2]$$
$$= 2000 + 16\ \Delta x + 0.04\ (\Delta x)^2$$

ولذلك فالكلفة الإضافية (extra cost) لإنتاج الوحدات الإضافية هي:

$$\Delta C = (C + \Delta C) - C$$
$$\Delta C = 2000 + 16\ \Delta x + 0.04\ (\Delta x)^2 - 2000$$
$$\Delta C = 16\ \Delta x + 0.04\ (\Delta x)^2$$

ولهذا فمعدل الكلفة لكل وحدة إضافية تم إنتاجها هو:

The average cost per item of the extra items is therefore:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 16 + 0.04 \Delta x$$

وعلى سبيل المثال افرض أن الإنتاج قد ازداد من 200 إلى 240 ($\Delta x=40$) لكـــل أســـبوع فـــإن معدل الكلفة للـــ40 وحدة الإضافية Average cost for the additional 40 items سوف تساوي: $16 + 0.04\ (40) = \$17.6$ لكل أسبوع.

أمـــا إذا كانت الزيادة من 200 إلى 210 ($\Delta x=10$) فإن معدل الكلفة إلى 10 وحدات الإضافية سوف يكون (16.4) لكل أسبوع.

وعلـــيه فـــإن الكلفة الحدية marginal cost هي معدل كلفة الوحدة الإضافية عندما يكون هناك تغيير قليل جداً بزيادة عدد الوحدات المنتجة.

The average cost per extra item when a very small change is made in the amount produced.

وفي المثال السابق فإن الكلفة الحدية كما يلي:

$$\text{Marginal Cost} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0} (16 + 0.04\Delta x) = 16$$

وفي حالة دالة الإنتاج العامة general cost function C(x) تمثل كلفة إنتاج x من الوحدات المحددة، فإن الكلفة الحدية هي:

$$\text{Marginal Cost} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

ويتضـــح بذلك أن الكلفة الحدية تمثل المشتقة لدالة الكلفة derivative of the cost function بالنســـبة إلـــى الكمـــيات المنـــتجة with respect to the amount produced، أي أن:

$$\text{Marginal Cost} = \frac{dc}{dx}$$

وهـــنا فـــإن الكلفة الحدية تقيس نسبة زيادة الكلفة بالنسبة للزيادة في كميات الإنتاج.

The marginal cost measures the rate at which the cost is increasing with respect to increases in the amount produced.

مثال 15

افرض أن الدالة التالية تمثل دالة الكلفة Total cost function:

$$C(x) = 0.001\, x^3 - 0.3\, x^2 + 40\, x + 800$$

حدد الكلفة الحدية marginal cost كدالة إلى المتغير x. قدر Evaluate الدالة الحدية عندما يكون الإنتاج production $x = 50$ ، $x = 100$ ، $x = 150$.

في هذا المثال المطلوب إيجاد مشتقة الدالة ($C'(x)$).

والدالـــة الســـابقة للإنـــتاج تـــتكون من عدة أنواع من قوى المتغير x وعند الاشتقاق نجد ما يلي:

$$C'(x) = 0.003\, x^2 - 0.6\, x + 40$$

الدالـــة الأخيـــرة تمـــثل الكلفة الحدية، ولهذا سوف تعطي معدل كلفة زيادة الإنتاج كمية قليلة على الكمية المنتجة وكما يلي:

عندما $x = 50$ فإن الكلفة الحدية سوف تكون:

$$C'(x) = 0.003\, x^2 - 0.6\, x + 40$$

$$C'(50) = (0.003)\,(50)^2 - (0.6)\,(50) + 40$$

$$= 7.5 - 30 + 40 = 16.5$$

وعندما تكون $x = 100$ فإن الكلفة الحدية سوف تكون:

$$C'(100) = (0.003)\,(100)^2 - (0.6)\,(100) + 40$$

$$= 30 - 60 + 40 = 10$$

أما عندما تكون $x = 150$ فإن الكلفة الحدية سوف تكون:

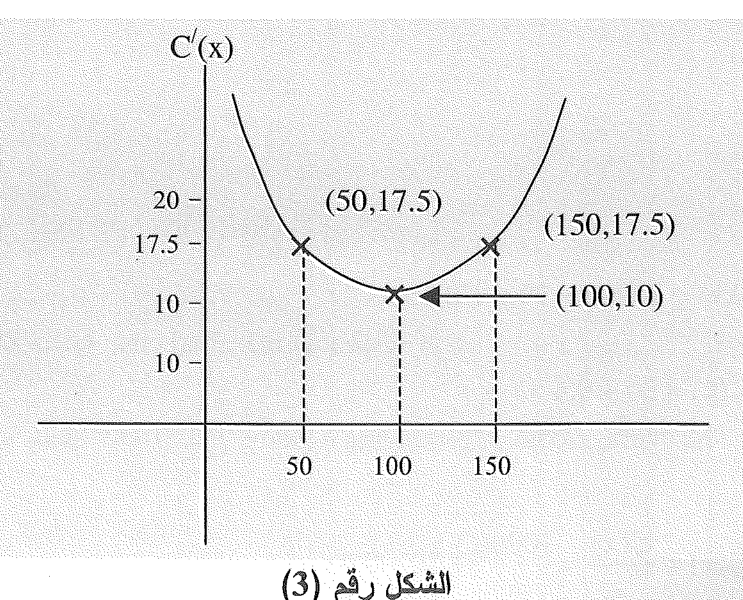
$$C'(150) = (0.003)\,(150)^2 - (0.6)\,(150) + 40$$

$$= 67.5 - 90 + 40 = 17.5$$

واضـــح من المثال أن الكلفة الحدية قد انخفضت عندما ازداد الإنتاج من 50 إلـــى 100 وحـــدة وبعدها ازداد مرة ثانية عندما ازداد الإنتاج من 100 إلى 150. ويمكـــن توضـــيح هـــذه النتائج في الشكل رقم (3) التالي. وهذا السلوك إلى الكلفة الحدية هو سلوك طبيعي حيث الإنتاج 100 هو الأمثل.

والتفســـير الاقتصـــادي يوضح احتمال إنتاج 100 وحدة هو الإنتاج الأمثل لاســـتخدام المكـــائن والمـــواد والـــوقت وأقل من ذلك يعني أننا لم نستخدم المواد

والمكـــائن والــوقت استخدام أمثل وكذلك عندما تزيد الكمية عن 100 فإن المكائن والمــواد الإضافية والوقت يحتاج إلى زيادة إضافية لا يمكن أن تستوعب من قبل المكائن مرةٍ واحدةٍ فنحتاج إلى تكرار العملية لإنتاج الوحدات الإضافية ولذلك تزداد الكلفة.



الشكل رقم (3)

تفسير الكلفة الحدية للمثال رقم (15)

وعلـــى ضوء نتائج الكلفة الحدية يكون من المهم أن نقارن بين سلوك الكلفة الحديـــة marginal cost مع معادلة أو نموذج الكلفة الخطي البسيط simple linear cost model. فـــي حالة الخطي البسيط $(C(x) = mx + b)$ كلاً من (b , m) ثوابت والكلفة الحدية $C'(x) = m$ حيث m ثابت لكل قيم x. هذه الكلفة ولكل وحدة إضافية additional unit للإنتاج تكون ثابتة، لا تعتمد أو مستقلة عن مستوى الإنتاج.

ومـــن الضـــروري عدم الخلط بين الكلفة الحدية marginal cost مع معدل الكلفة average cost. فإذا كان $C(x)$ هو دالة الكلفة the cost function فإن معدل كلفـــة الإنتاج x من الوحدات the average cost of producing x items هو الكلفة الكلية $C(x)$ total cost مقسوم على عدد الوحدات المنتجة وكما يلي:

$$\text{Average cost per Item} = \frac{C(x)}{x}$$

وهـذه الدالة تختلف بشكل كامل عن الكلفة الحدية والتي هي المشتقة $C'(x)$ derivative. الكلفة الحدية تمثل معدل الكلفة لكل وحدة إضافية average cost per additional unit للـزيادة القلـيلة فـي الإنتاج والفرق بين الحالتين كما في المثال التالي:

مثال 16

لدالة الكلفة cost function التالية:

$$C(x) = 10000 + 20x + 0.2x^2$$

الدالة الحدية marginal cost لهذه الدالة هي:

$$C'(x) = 20 + 0.4x$$

أمـا معدل كلفة الإنتاج The average cost of producing x items فهو كما يلي:

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10000}{x} + 20 + 0.4x$$

وهاتان الدالتان تختلفان اختلافاً كبيراً وجوهرياً فيما بينهما.

2) الربح والعائد الحدي Marginal Revenue and profit:

الآن نوجد اشتقاق العوائد revenues derived من مبيعات منتجات حقل sale أو خـدمات معينة of a firm's products. إذا كان $R(x)$ يمثل العائد بالدولار فإن الناتج من مبيعات x من الوحدات، ويعرف العائد الحدي marginal revenue يمثل مشتقة العائد، $R'(x)$ ، وكما يلي:

$$\text{Marginal Revenue} = R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}$$

افرض أن عدد الوحدات المباعة قد ازدادت من x إلى $x+\Delta x$، وتتبعها زيادة في العائد corresponding increment in revenue وتكون كما يلي:

ΔR = New Revenue – Old Revenue

$\Delta R = R(x + \Delta x) - R(x)$

معدل الزيادة في العائد لكل وحدة مباعة إضافية average increate in revenue per additional item sold نحصل عليه من قسمة ΔR على عدد الوحدات الإضافية أي يكون $\frac{\Delta R}{\Delta x}$، وتحديد قيمة الغاية limiting value لهذا المعدل كلما $\Delta x \to 0$ وهذا هو العائد الحدي marginal revenue.

والعائد الحدي يمثل الدخل الإضافي إلى الحقل لكل وحدة إضافية مباعة، أي يكون هو النسبة rate لزيادة العائد بالنسبة إلى الزيادة في حجم المبيعات increase in the volume of sales.

مثال 17

افرض أن الدالة التالية تمثل دالة العائد revenue function:

$$R(x) = 20x - 0.02\,x^2$$

عندما يكون x عدد الوحدات المباعة، حدد العائد الحدي. ثم قدر العائد الحدي عندما يكون $x = 200$.

في البداية نحتاج لإيجاد وتقدير $R'(x)$ كالآتي:

$$R'(x) = 20 - 0.04\,x$$

وهذا هو العائد الحدي عندما تكون x من الوحدات المباعة. وعندما $x = 200$ فإن العائد الحدي هو:

$$R'(200) = 20 - 0.04\,(200) = 12$$

ويعني ذلك عندما تباع 200 وحدة فإن أي زيادة قليلة في المبيعات يضيف زيادة على العائد بمقدار 12$ لكل وحدة.

ويمكن أن يعرف العائد أيضاً كالآتي $R(x) = xP$

عندما P هو سعر الوحدة المباعة و x عدد الوحدات المباعة، وفي حالات عديدة يتم استخدام المتغيرات للعلاقة بين x و P على أنها تمثل دالة الطلب demand equation.

مثال 18

أوجد العائد الحدي، عندما يكون 300 = x، إذا كانت دالة الطلب كما في المعادلة التالية:

Find the marginal revenue, when x = 200, if the demand equation is:

$x = 1000 - 100\ p$

حيث أن السعر = p وحدد الوحدات المباعة = x.

أولاً يجب أن نضع المعادلة بصيغة p السعر هو دالة إلى المتغير x عدد الوحدات المباعة أو المطلوبة كالآتي

$100\ p = 1000\ x$

بالقسمة على 100 تكون المعادلة:

$P = 10 - 0.01x$

وتمثل معادلة الطلب، أما دالة العائد فهي كما يلي:

Then the revenue function is given by:

$R(x) = xp$

$R(x) = xp = x\ (10 - 0.01x)$

$R(x) = 10\ x - 0.01x^2$

الآن نستطيع إيجاد العائد الحدي من الدالة للعائد وذلك بإيجاد المشتقة للدالة R(x) كالآتي:

$R'(x) = 10 - 0.02\ x$

أما العائد الحدي عندما يكون حجم الطلب أو المبيعات تساوي 300 = x فإن العائد الحدي سوف يكون 4 وكما يلي:

$R'(300) = 10 - (0.02)\ (300) = 10 - 6 = 4$

3) الربح الحدي Marginal Profit:

الربح في الأعمال التجارية هو الفرق بين العائد والكلفة

The profit in business is the difference between its revenue and its costs.

إذا كانت دالة العائد $R(x)$ عندما x تمثل عدد الوحدات المباعة. وإذا كانت $C(x)$ هي دالة الكلفة عندما x هو عدد الوحدات المنتجة. فإن الربح profit، $P(x)$، لإنتاج وبيع x من الوحدات يمكن إيجاده بالصيغة التالية:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

والمشتقة لهذه الصيغة $P'(x)$ تدعى الربح الحدي marginal profit والتي تمثل الربح الإضافي لكل وحدة إذا تم تغيير الإنتاج بمقدار قليل.

It represents the additional profit per item if the production changes by a small increment.

مثال 19

افرض أن معادلة الطلب لبضاعة معينة كما يلي:

The demand equation for a certain item is:

$$P + 0.2\,x = 100 \quad , \quad P = 100 - 0.2x$$

ودالة الكلفة كما يلي and the cost function is:

$$C(x) = 4000 + 30x$$

احسب الربح الحدي عندما يكون هناك 100 وحدة قد أنتجت وبيعت وكذلك 200 وحدة أنتجت وبيعت.

Compute the marginal profit when 100 units are produced and sold and when 200 units are produced and sold.

أعطيت دالة العائد كما يلي The revenue function is given by:

$$R(x) = xp = x\,(100 - 0.2\,x)$$

$$= 100\,x - 0.2\,x^2$$

ولذلك الربح من إنتاج وبيع x من الوحدات هو:

Therefore the profit from producing and selling x items is:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= (100x - 0.2x^2) - (4000 + 30x)$$

$$= 70x - 0.2x^2 - 4000$$

ولإيجـــاد الربح الحدي marginal profit نحتاج لحساب المشتقة لدالة الربح $P'(x)$، وكما يلي:

$$P'(x) = 70 - 0.4x$$

ولهذا عندما يكون $x = 100$ فإن الربح الحدي هو:

$$P'(100) = 70 - (0.4)(100) = 30$$

وهـــذا يعني عندما يتم إنتاج وبيع 100 وحدة فإن الربح الحدي، وهو الربح الإضافي extra profit per additional item عندما يزداد الإنتاج بكمية قليل، يكون $30 لكل وحدة إضافية تنتج وتباع.

أما عندما يكون الإنتاج $x = 200$ يكون الربح الحدي كما يلي:

$$P'(200) = 70 - 0.4(200) = -10$$

ولذلك عندما يكون الإنتاج 200 وحدة فالزيادة القليلة في الإنتاج ينتج خسارة that is, a حيث أن الربح سالب small increase in production results in a loss negative profit. $10 خسارة لكل وحدة إضافية منتجة.

أسئلة الفصل السابع
Exercises for chapter Seven

أوجد المشتقات للدوال التالية بالنسبة للمتغير المستقل للأسئلة (1-6):

Find the derivatives of the following functions with respect to the independent variables involved:

1) $f(x) = 2x - 5$

2) $g(x) = 12$

3) $f(x) = x^3 - 3x + 10$

4) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

5) $g(u) = \frac{u}{u-1}$

6) $f(x) = 1/x$

أوجـد مـيل المماس لرسم الدوال التالية في النقطة المحددة ثم حدد المعادلة إلى الخط المماس للأسئلة (7-9):

Find the slope of the tangent to the graphs of the following functions at the indicated points. Determine the equation of the tangent line in each case:

7) $y = 4x^2 - 5$ at $x = 3$

8) $y = x^2 + 2x + 4$ at $x = -3$

9) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ at $x = 3$

أوجد المشتقات للدوال التالية للأسئلة (10-21):

Differentiate the following expressions:

10) $y = 5 - 2x^4 + x^2$

11) $y = x^5 + \frac{1}{x^4}$

12) $y = 2\sqrt{x} + 2/\sqrt{x}$

13) $y = 2x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$

14) $y = (x^2 - 10)(2x - 3)$

15) $y = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^3 - (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^3$

16) $y = (x^2 + \frac{1}{x})^3$

17) $f(x) = 4x^4 - 7x_3 + 3x^2 - 10$

18) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2}$

19) $f(x) = (8x)^{\frac{2}{3}} + (8x)^{-\frac{2}{3}}$

20) $f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{6}{x^6}$

21) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}$

حدد معادلة المماس لرسم الدوال التالية في النقاط المحددة للأسئلة (22-24):

Determine the equation of the tangent line to the graph of the following functions at the indicated points:

22) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ at (1,2)

23) $f(x) = \frac{2}{x}$ at x = -2

24) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2}$ at x = 1

أوجد الكلفة الحدية للدوال التالية للأسئلة (25-27):

Find the marginal cost for the following cost functions:

25) $C(x) = 80 + (\ln 2)\, x^2$

26) $C(x) = 0.001x^3 - 0.06x^2 + 30x + 1000$

27) $C(x) = 1000 + 10x$

أوجد العائد الحدي للدوال التالية للأسئلة (28-29):

Find the marginal revenue for the following revenue functions:

28) $R(x) = 10x - 0.02x^{3/2}$

29) $R(x) = 0.2x - 10^{-2}\, x^2 - 10^{-4}\, x^{5/2}$

30) If the demand equation is $x + 4p = 200$. find the marginal revenue, $R'(x)$

31) If the demand equation is $\sqrt{x} + p = 100$, find the marginal revenue.

32) If in exercise (26) the cost function is $C(x) = 200 + 10x$, find the marginal profit.

33) If, in exercise (27) the cost function is $C(x) = 150 + x$, find the marginal profit.

استخدم قاعدة الضرب لإيجاد المشتقات للدوال التالية للأسئلة (34-37):

Using the product rule, find the derivatives of the following functions with respect to the variable involved:

34) $f(x) = (x^2 + 1)(x^4 + 3)$

35) $y = (x^3 - 10x + 1)(4x + 10)$

36) $f(x) = (t^3 + 1)(t^2 - \frac{1}{t})$

37) $g(x) = (x + \frac{1}{x})(5t^2 - \frac{1}{t^2})$

استخدم قاعدة القسمة لإيجاد المشتقات للدوال التالي حسب المتغير المستقل للأسئلة (38-43):

Use the quotient vale to find the derivatives of the following functions with respect to the independent variable involved:

38) $y = \frac{x}{x-1}$

39) $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

40) $g(x) = \frac{10-x}{x^2-10}$

41) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

42) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

43) $f(x) = \frac{(x^3+1)(2x+4)}{4x-1}$

أوجد المشتقة للدوال التالية بالنسبة للمتغير المستقل للأسئلة (44-49):

Find the derivatives of the following functions with respect to the independent variable involved:

44) $y = (3x+4)^6$

45) $y = (2x^3+1)^{\frac{5}{2}}$

46) $f(x) = \sqrt{10-2t}$

47) $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+1)^5}$

48) $y = (x^2 + \dfrac{1}{x^2})^4$

49) $f(x) = (x + 2)^4 (2x + 2)^5$

أوجد المشتقة $\dfrac{dy}{dx}$ للأسئلة (50-57):

Find dy/dx in the following functions:

50) $y = e^{3x}$

51) $y = e^{\sqrt{x}}$

52) $y = xe^{-x^2}$

53) $y = x^2 \ln (x^2 + 1)$

54) $y = e^x \ln x$

55) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

56) $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$

57) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

أوجد المشتقات للدوال التالية للأسئلة (58-69):

Find the indicated derivatives of the following functions with respect to the independent variable inverted:

58) Find $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *if* $y = 4x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 100$

59) Find $f''(t)$ if $f(t) = (t^3 + 2)^2$

60) Find $f''(x)$ $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 3)$

61) Find y'' if $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

62) Find $f'''(t)$ if $f(t) = \dfrac{t-1}{t+1}$

63) Find $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ if $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$

64) Find $y^{(3)}$ if $y = x\ln x$

65) Find $y^{(4)}$ if $y = xe^x$

66) Find y'' if $y = \ln [(x+1)(x+2)]$

67) Find y''' if $y = x^3 + e^{2x}$

68) Find y'' if $y = (x + 1) e^{-x}$

69) Find y'' if $y = \dfrac{x^2+1}{e^x}$

الرياضيات وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثامن

التكامل وتطبيقاته

8

الرياضيات وتطبيقاتها

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثامن
التكامــل وتطبيقاتــه
Integration and its applications

8-1 مقدمة Introduction:

سنعرض في هذا الفصل دراسة المفهوم الرياضي المهم لكثير من التطبيقات ومـنها الإدارية والهندسية ألا وهو التكامل Integration عن طريق إعطاء تعريفاً واضحاً للتكامل غير المحدد لدالة Definition of indefinite integral ونشرح كيفية إيجاد الـتكامل غيـر المحدد للدوال المعرفة How to integrate some known functions وعـن الطـرق المختلفة لإيجاد بعض من قيم التكامل غير المحدد منها التكامل بطريقة التغيير أو التحويل transformation of variables والتكامل بطريقة التجـزئة integration by parts والتكامل بالتفريق إلى كسور بسيطة integration using fractions. وكـذلك سـيتم التعرف على التكافل المحدد Definite integral وسيتضـمن الفصـل على العديد من الأمثلة examples ويحتوي الفصل في نهايته على العديد من الأسئلة exercises.

وبالتالـي فـإن هذا الفصل سيتضمن عدة مباحث منها المبحث 2-8 مفهوم التكامل غير المحدد The concept of indefinite integral والمبحث 3-8 التكامل لـدوال معـروفة - قـواعد التكامل Rules for integration والمبحث 4-8 طرق الـتكامل Integration Methods. أمـا المبحث الأخير 5-8 التطبيقات الاقتصادية للتكامل Economics application for integrals.

8-2 مفهوم التكامل غير المحدد The concept of indefinite integral:

لاحظـنا ممـا سبق ماذا نعني بالتفاضل differentiation والتي تمثل عملية إيجـاد المشتقة derivative. والآن سنقوم بالتعرف على العملية المعاكسة لها والتي تسـمى بالتكامل integration والتي تمثل إيجاد قيمة التكامل integral بتعبير آخر نقول بأن أي عمليتين تقوم كل منهما بإلغاء الأخرى تسمى العملية المعاكسة ولذلك

يوجد للمشتقة عملية معاكس يطلق عليها اسم التكامل. ويرمز للتكامل عادة بالرمز ∫ ونكتب $\int f(x)\,dx$ والذي يدعى بالتكامل غير المحدد indefinite integral، أما $\int_a^b f(x)dx$ فيمثل التكامل المحدد definite integral وسنقوم الآن بتوضيح معنى التكامل كالآتي:

إذا كانت الدالة f(x) هي مشتقة الدالة g(x) في مجال معين وبالنسبة للمتغير x والذي يعني:

$$g'(x) = f(x)$$

فإننا نسمي الدالة g(x) تكاملاً للدالة f(x) في المجال المفروض.

If f(x) is the derivative of the function g(x) for some domain with respect to the variable x.i.e, $g'(x) = f(x)$. Then, we said that g(x) is the integration of the function f(x) for the same domain.

وبالتالي فإن البحث في تكامل الدالة f(x) يعني البحث عن دالة جديدة، ولتكن g(x)، بحيث أن مشتقتها it's derivative هي الدالة المفروضة f(x). ونسمي الدالة g(x) بالدالة الأصلية للدالة f(x) أو يطلق عليها اسم تكامل integral للدالة f(x).

for example: $(x^2 + 3x + 1)' = 2x + 3$

Then, the function $x^2 + 3x + 1$ is the integral for the function $2x + 3$

وبما أن مشتقة العدد الثابت يساوي صفر فإننا من تعريف تكامل الدالة نستنتج أن هذا التكامل معين بغض النظر عن قيمة العدد الثابت. ففي المثال أعلاه نلاحظ أن الدوال:

$x^2 + 3x + 10$

$x^2 + 3x - 5$

$x^2 + 3x + \frac{3}{4}$

يمكــن اعتــبار كل منها تكاملاً للدالة 3 + 2x وذلك لأن مشتقة كل منها هو 2x + 3.

ولهــذا إذا كانت الدالة g(x) هي واحدة من تكاملات الدالة f(x) فإن كل تلك التكاملات يمكن التعبير عنها بالشكل g(x) + c حيث أن c ثابت كيفي ويسمى بثابت الــتكامل. وإذا أردنــا اختــيار دالة أصلية واحدة فقط فإننا نعطي للثابت c القيمة المناسبة.

ولنفــرض الآن أنــنا نريد تعيين قيمة c التي من أجلها تكون قيمة التكامل للدالة 3 - 2x مساوية إلى 7 عندما x = 2.

Find the value for the constant c such that the integration of the function 2x – 3 equals 7 if x equals 2.

لأجل إيجاد قيمة الثابت لدينا:

تكامــل الدالة 3 - 2x هو $x^2 + 3x + c$، وكما رأينا سابقاً. وبالتالي فإن قيمة ذلك التكامل عندما x = 2 مساوياً إلى 7 يعني أن:

$$(2)^2 + 3\,(2) + c = 7$$

أي أن:

$$4 + 6 + c = 7$$

$$10 + c = 7$$

$$c = 7 - 10 = -3$$

وبالتالــي فإن التكامل الوحيد للدالة 3 - 2x والذي قيمته 7 عندما x = 2 هو عندما c = -3. ولأجل توضيح العلاقة بين التكامل والتفاضل لدينا:

Relationship between integration and differentiation:

بالرجوع لتعريف المشتقة derivative فإن:

$$f^{\backslash}(x) = \frac{dy}{dx}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$dy = f'(x)\, dx$$

والتـــي تعـــرف باسم تفاضل الدالة y ونرمز له بالرمز dy. وذلك يعني أن تفاضل أي دالة يساوي مشتقتها في تفاضل المتغير المستقل X. أي أن عملية إيجاد تكامـــل الدالـــة f(x) تعنـــي الانتقال من هذه الدالة، والتي تمثل مشتقة لدالة أصلية أخـــرى، إلـــى الدالة الأصلية لها y. أي العودة من التفاضل dy إلى y والذي يعني إلغاء عملية التفاضل.

ولذلك فإننا نرمز لتكامل الدالة f(x) بالرمز $\int f(x)\, dx$.

8-3 التكامل لدوال معروفة – قواعد التكامل Rules for integration:

بالاســـتفادة من قواعد الاشتقاق والتي تم ذكرها في الفصل السابق يمكننا أن نجـــد قيمة تكاملات مجموعة من الدوال وبشكل مباشر ودون اللجوء إلى أي وسيلة رياضـــية. والتالي تمثل قائمة بتكامل دوال معروفة حيث أن n هو عدد حقيقي وأن a_1 و a_2 عددان ثابتان حقيقيان. أما c فهو ثابت التكامل.

The following are some useful rules for integration, where n is a Real number. a_1 and a_2 are real constants. and c is the constant of the integration method.

1) $\int n^x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad , \qquad n \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

3) $\int a_1 f(x) dx = a_1 \int f(x) dx$

4) $\int [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] dx = a_1 \int f_1(x) dx + a_2 \int f_2(x) dx$

5) $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + c$

6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

7) $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

6) $\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c$

وبالاستعانة بالقواعد أعلاه يمكن إجراء التكاملات التي ستعرض في الأمثلة التالية:

مثال 1

أوجد التكامل للدوال التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int dx = x + c$

b) $\int x dx = \frac{1}{2}x^{2} + c$

c) $\int x^{2}dx = \frac{1}{3}x^{3} + c$

d) $\int 3x^{2}dx = 3\int x^{2}dx = (3)(\frac{1}{3})x^{3} + c = x^{3} + c$

e) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

f) $\int \frac{1}{x^{2}}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

h) $\int \frac{2}{x^{3}}dx = 2\int x^{-3}dx = (2)(\frac{x^{-2}}{-2}) + c = -x^{-2} + c = \frac{-1}{x^{2}} + c$

i) $\int (3x-1)dx = \int 3xdx - \int dx = 3\int xdx - \int dx = \frac{3}{2}x^{2} - x + c$

j) $\int\left[16x^7 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right]dx = 16\int x^7 dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx$

$$= (16)\left(\frac{x^8}{8}\right) - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + \ln|x| + c$$

$$= 2x^8 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + c$$

h) $\int\left[e^x - 3x^2\right]dx = \int e^x dx + 3\int x^2 dx$

$$= e^x + (3)\frac{x^3}{3} + c$$

$$= e^x + x^3 + c$$

مثال 2

أوجد تكامل ما يلي:

Find the integral for the following:

a) $\int x(x+1)dx$

يلاحـــظ هـــنا أننا نود تكامل حاصل ضرب. ولكن إذا استطعنا أن نضرب الحدين الموجودين فإن ذلك سيسهل شكل وطريقة إيجاد التكامل كالآتي:

$$\int x(x+1)dx = \int (x^2 + x)dx$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + c$$

b) $\int (x^3+1)(x^2-1)dx = \int (x^5 - x^3 + x^2 - 1)dx$

$$= \int x^5 dx - \int x^3 dx + \int x^2 dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x + c$$

c) $\int (x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x})dx$

وبضـــرب الحدان الموجودان داخل عملية التكامل والاستعاضة بأن الضرب هو الفرق بين مربعين لدينا ما يلي:

$$\int \left[x^2 - (\frac{1}{x})^2 \right] dx = \int x^2 dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int x^2 dx - \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \left(\frac{-1}{3} \right) x^{-3} dx + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3x^3} + c$$

d) $\int (x+5)^2 dx$

وبعملية فتح التربيع الموجودة على الحد x+5 نحصل على ما يلي:

$$\int (x+5)^2 dx = \int (x^2 + 10x + 25) dx$$

$$= \int x^2 dx + 10 \int x dx + 25 \int dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{2}x^2 + 25x + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 25x + c$$

مثال 3

أوجد تكامل ما يلي:

Find the integral for the following:

a) $\int (x^2 + x + 1)(2x + 1)dx$

يمكن إيجاد هذا التكامل بطريقتين وهما:

الطريقة الأولى: سنقوم بضرب الحدين في داخل التكامل ومن ثم إجراء التكامل كما تم ملاحظته في الأمثلة السابقة وكما يلي:

$$= \int (2x^3 + x^2 + 2x^2 + x + 2x + 1)dx$$

$$= \int (2x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx$$

$$= 2\int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 3\int x dx + \int dx$$

$$= (2)\left(\frac{x^4}{4}\right) + (3)\left(\frac{x^3}{4}\right) + (3)\left(\frac{x^2}{4}\right) + x + c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

الطريقة الثانية: وسنقوم هنا بتمييز أن الحدين داخل التكامل أحدهما هو مشتقة الحد الآخر وباستخدام القاعدة رقم (5) فإن $f(x) = x^2 + x + 1$ وأن $f'(x) = 2x + 1$ وبالتالي فإن قيمة التكامل تصبح:

$$\int (x^2 + x + x)(2x + 1)dx = \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^2 + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4 + x^3 + x^2 + x^3 + x^2 + x + x^2 + x + 1\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

وطبيعي أن تتفق الطريقتان في الناتج والذي يمثل تكامل الدالة.

ولكــن يجب أن نلاحظ هنا أن الحل بالطريقتين كان نتيجة أن الضرب كان ممكناً للعمل بالطريقة الأخرى.

أما إذا كان الضرب غير ممكناً (وهذا ما سنراه في (b)، (c)، و(d) من هذا المثال) فيجب علينا إيجاد التكامل باتباع فكرة الطريقة الثانية والمعتمدة على القاعدة رقم (5) وكالآتي:

b) $\int (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}(2x+1)dx$

$$= \frac{3}{4}(x^2 + x + 1)^{\frac{4}{3}} + c$$

c) $\int (x^3 + 1)^4 x^2 dx$

وهنا نلاحظ أن مشتقة $x^3 + 1$ هي $3x^2$. وذلك يعني أننا نحتاج إلى الضرب فــي 3 للحصــول على تلك المشتقة. عملية الضرب هذه ستغير قيمة التكامل ما لم نقوم بالقسمة على 3 في الوقت ذاته. وذلك يعني ما يلي:

$$\int \frac{1}{3}(x^3 + 1)^4 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{5}(x^3 + 1)^5 + c$$

$$= \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + c$$

d) $\int \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx$

ونلاحظ هنا أن مشتقة lnx هي $\frac{1}{x}$ وبالتالي فإن قيمة التكامل ستكون:

$$\frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$$

مثال 4

أوجد تكامل ما يلي:

Find the integral for the following:

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

وهنا نلاحظ بأن المقام $x^2 + x + 1$ وأن مشتقته هي 2x+1 والتي تمثل البسط. وذلك يعني أن البسط هو مشتقة المقام وباستخدام القاعدة رقم (6) فإن نتيجة أو قيمة التكامل هي:

$$\ln \left| x^2 + x + 1 \right| + c$$

b) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3} dx$

باستخدام نفس الملاحظة أعلاه فإن قيمة التكامل هي:

$$\frac{-1}{2} (x^2 + x + 1)^{-2} + c = \frac{-1}{2(x^2 + x + 1)^2} + c$$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} dx$

وهنا نلاحظ بأن المقام بدون الجذر $1-3x^2$ ومشتقته $-6x$. وبذلك يعني علينا ضرب البسط في المقدار -6 ليصبح البسط مشتقة المقام وبالتالي علينا أيضاً قسمة الحد على المقدار -6 في نفس الوقت للحصول على ما يلي:

$$\frac{-1}{6}\int\frac{-6x}{\sqrt{1-3x^2}}dx \qquad =\frac{-1}{6}\int(1-3x^2)^{\frac{-1}{2}}(-6x)dx$$

$$=\frac{-2}{6}(1-3x^2)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{-1}{3}\sqrt{1-3x^2}+c$$

8.4 طرق التكامل Integration Methods:

في هذا المبحث سنقوم بعرض بعض من الطرق العامة لإيجاد التكامل كالآتي:

8-4-1 التكامل بطريقة التعويض Transformation of variables:

للحصول على تكامل دالة ما ولم نستطع تطبيق أي من قواعد التكامل السابق ذكرها فقد يكون بالإمكان حساب التكامل المطلوب عن طريق التعويض أو التغيير أو التحويل من المتغير X إلى متغير آخر بحيث تصبح الدالة الجديدة من أشكال الدوال التي تنطبق عليها إحدى قواعد التكامل السابقة.

لو كان لدينا التكامل $\int f(x)dx$ وقمنا بتغيير x إلى u مثلاً من خلال العلاقة x = h (x) فإن تفاضل x سيكون dx = h/(u) dx وبالتالي فإن التكامل الأصلي للدالة سيصبح:

$$\int f(x)dx = \int f(h(u))h'(u)du$$

وبعد حساب قيمة التكامل الأخير فإننا نعود إلى المتغير X عن طريق حساب قيمة u بدلالة X. والمثال التالي سيوضح ذلك:

مثال 5

أوجد قيمة التكاملات التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int (2x+3)^4 dx$

وباستخدام العلاقة $u = 2x + 3$ فإن $x = \frac{u-3}{2}$ وأن $dx = \frac{1}{2}du$ وبالتالي

فإن قيمة التكامل ستصبح:

$$\int (2x+3)^4 dx = \int u^4 . \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= \frac{1}{10} u^4 + c$$

وأخيراً نقوم بالتعويض عن u بدلالة x ليصبح الناتج:

$$\frac{1}{10}(2x+3)^5 + c$$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}} dx$

وباستخدام العلاقة $u = 3x^2 - 2$ فإن $du = 6x\ dx$ وبالتالي فإن قيمة التكامل ستصبح:

$$\int (3x^2-2)^{\frac{-1}{2}} x dx = \int u^{\frac{-1}{2}} . \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{6} . 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}(3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2 - 2} + c$$

8-4-2 التكامل بطريقة التجزئة Integration by parts:

لحساب التكامل بطريقة التجزئة علينا الرجوع لمشتقة حاصل ضرب دالتين والتي كانت كالآتي:

$$[h_1(x)h_2(x)]' = h_1(x)h'(x_2) + h_2(x)h'(x_1)$$

والتي كانت تعني الدالة الأولى في مشتقة الثانية مضافاً إليه الدالة الثانية في مشتقة الأولى.

وبأخذ التكامل للطرفين نحصل على ما يلي:

$$\int [h_1(x)h_2(x)]' dx = \int h_1(x)h_2'(x_2) + \int h_2(x)h_1'(x_1)dx$$

وبمـــا أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة يمثل $h_1(x)h_2(x)$ فإن ذلك يعني أن العلاقة الأخيرة ستصبح كالآتي:

$$h_1(x)h_2(x) = \int h_1(x)h_2'(x)dx + \int h_2(x)h_1'(x)dx$$

وذلك يعني أن:

$$\int h_1(x)h_2'(x)dx = h_1(x)h_2(x) - \int h_1'(x)h_2(x_1)dx$$

وتطبيق هذه الطريقة سيكون أنه عندما نريد إيجاد قيمة تكامل حاصل ضرب دالتين بحيث نستطيع تكامل أحدها ونشتق الأخرى فإننا يمكننا تطبيق طريقة التكامل بالتجزئة لإيجاد قيمة التكامل. وسيتم ملاحظة ذلك من المثال التالي:

مثال 6

أوجد قيمة التكاملات التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int x\sqrt{x+5}dx$

بافتراض أن $x = h_1(x)$ فإن $dx = h_1^{/}(x)$ وبافتراض أن:

$$\int \sqrt{x+5}dx = \int h_2^{/}(x)dx$$

$$\int (x+5)^{\frac{1}{2}}dx = \int h_2^{/}(x)dx$$

فإن:

$$\frac{3}{2}(x+)^{\frac{3}{2}} = h_2(x)$$

وبالتالي قيمة التكامل الأصلي:

$$\int x\sqrt{x+5} = x.\frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{3}{2}(x+5)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+5)^{\frac{5}{2}} + c$$

b) $\int \ln x dx$

بافتـــــراض أن $h_1(x) = \ln x$ فـــــإن $h^{/}(x) = \frac{1}{x}dx$. وبافتـــــراض أن $\int dx = \int h_2^{/}(x)dx$ فإن $x = h_2(x)$ وبالتالي فإن قيمة التكامل:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln - \int dx$$

$$= \mathrm{x}\ln \mathrm{x} - \mathrm{x} + \mathrm{c}$$

c) $\int xe^{x}dx$

وبافتراض أن $h_1(x) = x$ فإن $h_1^{/}(x) = dx$ وبافتراض أن

$\int e^{x}dx = \int h_2^{/}(x)dx$ فإن $e^{x} = h_2(x)$ وبالتالي فإن قيمة التكامل هي:

$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx$$

$$= \mathrm{xe^{x} - e^{x} + c}$$

8-4-3 التكامل بالتفريق إلى كسور بسيطة Integration by using fractions:

وهــذه الفقرة تتناول تكامل الدوال الكسرية fraction functions وهي الدوال التي كل منها على شكل كسر fraction بسطه كثير حدود ومقامه كثير حدود كذلك. ويعــتمد بصورة أساسية على كون درجة البسط أقل من درجة المقام ويمكن تحليل المقــام إلى عوامله ومن ثم إيجاد تكامل الكسور البسيطة التي تكون الكسر المراد إيجــاد قيمة تكامله. وعندما يكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام فعندئذٍ علينا أولاً بقسمة البسط على المقام، بأي من الطرق السابق ذكرها، للحصول على نــاتج القســمة مضافاً إليه كسر يكون درجة بسطه أقل من درجة مقامه وبعد ذلك نقــوم بالتجــزئة إلى الكسور البسيطة ومن ثم إيجاد ناتج أو قيمة التكامل. والمثال التالي سيوضح ذلك:

مثال 7

أوجد قيمة التكاملات التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3}dx$

نلاحظ هنا بأن البسط هو ليس مشتقة المقام لنستطيع استخدام إحدى العلاقات الســابق ذكــرها لإيجاد التكامل، كما وأننا لا نستطيع استخدام طريقة التعويض أو

طريقة التكامل بالتجزئة. ولكن بما أن الدالة كسرية وأن درجة البسط أقل من درجة المقام فإننا سنطبق طريقة التكامل بالتجزئة إلى كسور بسيطة كالآتي:

أولاً علينا تحليل المقام إلى عوامله كالآتي:

$$X^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

وبالتالي فإن التكامل سيكون كما يلي:

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+1)}dx$$

وبما أن الكسر $\frac{1}{(x-3)(x+1)}$ يمكن كتابته على الشكل:

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

فإننا نستطيع إيجاد قيمة A و B من تساوي الشكلين كالآتي:

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

وذلك يعني أن $A + B = 0$ وأن $A - 3B = 1$. ومن حل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$A=\frac{1}{4} \quad , \quad B=\frac{-1}{4}$$

وكذلك يمكن الحصول على قيمة كل من A و B باستخدام العلاقة $A(x+1) + B(x-3) = 1$ والتعويض عن قيمة x بأصفار المقام. أي عندما $x = 3$ فإن $4A = 1$ ويعني $A=\frac{1}{4}$ ، أما عندما $X = -1$ فإن $-4B = 1$ ويعني $B=\frac{-1}{4}$.

وعند التعويض عن تلك القيمتين نحصل على التكامل التالي:

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+1)}dx$$

$$= \int \frac{A}{x-3}dx + \int \frac{B}{x+1}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{x-3}dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{|x-3|}{|x+1|} + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + c$$

b) $\int \frac{x^2+5x-1}{x+3}dx$

ونلاحظ هنا بأن الدالة كسرية وأن درجة البسط أكبر من درجة المقام ولذلك علينا إيجاد ناتج القسمة (باستخدام طريقة القسمة الطويلة) لنحصل على:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{x+3}dx = \int (x+2)dx - \int \frac{7}{x+3}dx$$

$$= \int xdx + \int 2dx - \int \frac{7}{x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - 7\ln|x+3| + c$$

c) $\int \frac{x^4 - 2x}{4x^2 - 9} dx$

ونلاحظ هنا بأن الدالة كسرية وأن درجة البسط أكبر من درجة المقام وبالتالي علينا بإجراء القسمة (باستخدام القسمة الطويلة) كالآتي:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16}$$

$$4x^2 - 9 \;\Big|\; x^4 - 2x$$

$$\mp x^4 \pm \frac{9}{4}x^2$$

$$\frac{9}{4}x^2 - 2x$$

$$\mp \frac{9}{4}x^2 \pm \frac{81}{16}$$

$$-2x + \frac{81}{16}$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل ستكون:

$$\int \frac{x^4 - 2x}{4x^2 - 9} dx = \int \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16} \right) dx + \int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{4x^2 - 9} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int x^2 dx + \frac{9}{6} \int dx + \int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{4x^2 - 9} dx$$

ونلاحظ أن الكسر الأخير هو دالة كسرية درجة بسطها أقل من درجة مقامها وبتحليل المقام $4x^2-9$ إلى عوامله $(2x+3)\ (2x-3)$ فإن:

$$\int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{4x^2 - 9} dx = \int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{(2x-3)(2x+3)} dx$$

والكسر الأخير يساوي:

$$\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{2x+3}=\frac{A(2x+3)+B(2x-3)}{(2x-3)(2x+3)}$$

وأخيراً فإن:

$$A(2x+3)+B(2x-3)=-2x+\frac{81}{16}$$

$$2Ax+3A+2Bx-3B=-2x+\frac{81}{16}$$

$$(2A+3B)x+(3A-3B)=-2x+\frac{81}{16}$$

وبالتالي فإن:

$$2A + 2B = -2$$

$$3A-3B=\frac{81}{16}$$

وبحل المعادلتين الأخيرتين حلاً مشتركاً نجد أن $B=\frac{-43}{32}$ و $A=\frac{11}{32}$

وذلك يعني أن:

$$\int\frac{-2x+\frac{81}{16}}{4x^2-9}dx=\int\frac{A}{2x-3}dx+\int\frac{B}{2x+3}dx$$

$$=\frac{11}{(32)(2)}\int\frac{2}{2x-3}dx+\frac{43}{(32)(2)}\int\frac{2}{2x+3}dx$$

$$=\frac{11}{64}\ln|2x-3|-\frac{43}{64}\ln|2x+3|+c$$

وأخيراً فإن:

$$\int\frac{x^4-2x}{4x^2-9}dx=\frac{1}{12}x^3+\frac{19}{16}x+\frac{11}{64}\ln|2x-3|-\frac{43}{64}\ln|2x+3|+c$$

8-4-4 التكامل المحدود Definite Integral:

أمـــا عن التكامل المحدود فإنه تكامل ولكن لفترة أو لمجال معين ونرمز لهذا التكامل بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ حيث أن a و b قيمتان حقيقيتان. ونعني بذلك التكامل أن نجـــد قيمة التكامل من النقطة a إلى النقطة b وعن قيمة هذا التكامل فهي التعويض عن ناتج التكامل عند النقطة b مطروحاً منه ناتج التكامل عند النقطة a.

Let $\int f(x)dx = g(x)$

Then $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$

ويمكن تجزئة مجال التكامل المحدود كالآتي:

Let f(x) be a function that can be integrated over the interval [a , b], and let c be any point in this interval. i.e. a < c < b. Then:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

والمثال التالي يوضح التكامل المحدود كالآتي:

مثال 8

أوجد قيمة التكامل التالي:

Find the integral of the following:

a) $$\int_3^5 (x^2 - x + 1)dx = \int_3^5 x^2 dx - \int_3^5 x dx + \int_3^5 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big]_3^5 - \frac{x^2}{2}\Big]_3^5 + x\Big]_3^5$$

$$= \frac{1}{3}(5^3 - 3^3) - \frac{1}{2}(5^2 - 3^2) + (5-3) = 26.67$$

b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

ولإيجـــاد قـــيمة هـــذا التكامل فيشابه طريقة التكامل المحدود مع كون أحد أطراف التكامل غير محدودة (∞) والحل كما يلي:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{dx}{x^2}$$

$$= \underset{x\to\infty}{lin} \left.\frac{-1}{x}\right]_1^x$$

$$= \underset{x\to\infty}{lin} \frac{-1}{x} - (-1)$$

$$= \frac{-1}{\infty} + 1$$

$$= 0 + 1 = 1$$

8-5 التطبيقات الاقتصادية للتكامل:

Economics application for integrals

للـــتكامل تطبـــيقات عديـــدة مـــنها الفيزيائية، الرياضية، الهندسية، الإدارية والاقتصادية وغيرها. وسنركز في هذا المبحث على التطبيقات الاقتصادية لأهميتها ودرجـــة علاقـــتها بالنواحـــي الإدارية والمالية وخصوصاً للطلبة في التخصصات المالية والإدارية. وسنذكر بعض من جوانب هذه التطبيقات كالآتي:

أ) استخراج دالة التكلفة الكلية Total cost function ودالة الإيراد الكلي Total revenue function:

ببســـاطة فإن دالة التكلفة الكلية total cost function هي تكامل دالة التكلفة الحديـــة marginal cost function. أما دالة الإيراد الكلي total revenue function

فهـــي تكامـــل دالـــة الإيراد الحدي marginal revenue function. والمثال التالي لتوضيح ذلك:

مثال 9

إذا علمـــت أن دالة التكلفة الحدية هي $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$ حيث أن x هو حجم الإنتاج. أوجد دالة التكاليف الكلية y:

$$Y = \int f(x)dx$$

$$= \int (4x^2 + 3x + 1)dx$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

وبافتـــراض أن التكالـــيف الكلية معلومة، ولتكن 15، عندما حجم الإنتاج x يساوي صفر فإن:

$$Y = c = 15$$

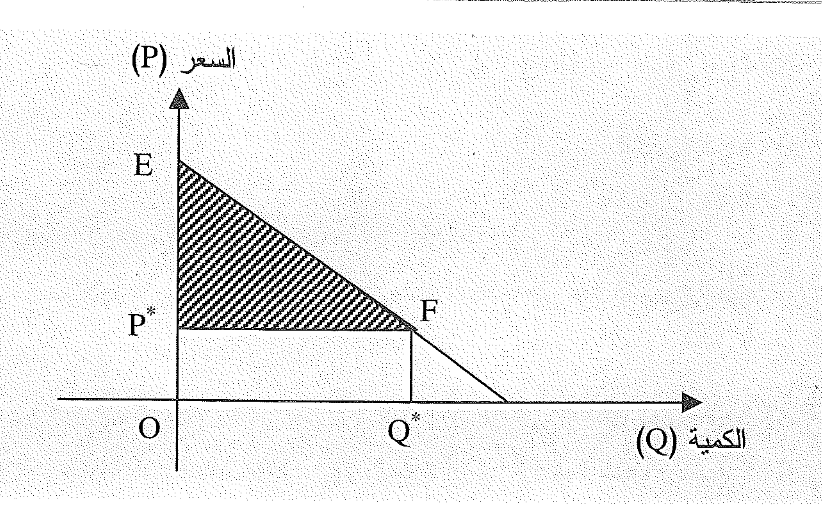
عندئذٍ تصبح دالة التكاليف الكلية معينة بصورة وحيدة كالآتي:

$$Y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 15$$

ب- حساب فائض المستهلك Consumer surplus:

لنفرض أن دالة الطلب Q من قبل المستهلك هي $Q = a + bp$ حيث أن p هو السعر وأن a و b هما عددان حقيقيان.

وبمـــا أن الطلب دالة متناقصة decreasing في السعر فإن الثابت b يجب أن يكـــون سالباً negative $(b < 0)$. وليكن p^* و Q^* هما سعر التوازن وكمية الطلب التوازني فعندئذٍ تكون مساحة الشكل المظلل (المثلث rectangular) في الشكل التالي تمثل فائض المستهلك consumer surplus:



ولحســاب فائض المستهلك علينا إيجاد مساحة الشكل المثلثي المظلل والتي تســاوي مســاحة $OEFQ^*$ مطــروحاً منه مساحة OP^*FQ^*. ويلاحظ بأن مساحة $OEFQ^*$ هي تكامل دالة السعر $P = \frac{Q}{b} - \frac{a}{b}$

أما مساحة المستطيل OP^*FQ^* فهو P^*Q^*. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال 10

إذا علمــت أن دالة الطلب $Q = 10 - 2p$ وكان سعر التوازن $P^* = 3$ أوجد فائض المستهلك.

إذا كانت دالة الطلب $Q = 10 - 2p$ فإن دالة السعر P ستكون $P = 5 - \frac{1}{2}Q$

وإن كــان ســعر الــتوازن $P^* = 3$ فإن كمية التوازن $Q^* = 4$ وعليه يكون فائض المستهلك هو:

$$\int_0^{Q^*}(5 - \frac{1}{2}Q)dQ - P^*Q^*$$

$$\left[5Q - \frac{1}{4}Q^2\right]_0^4 - (3)(4)$$

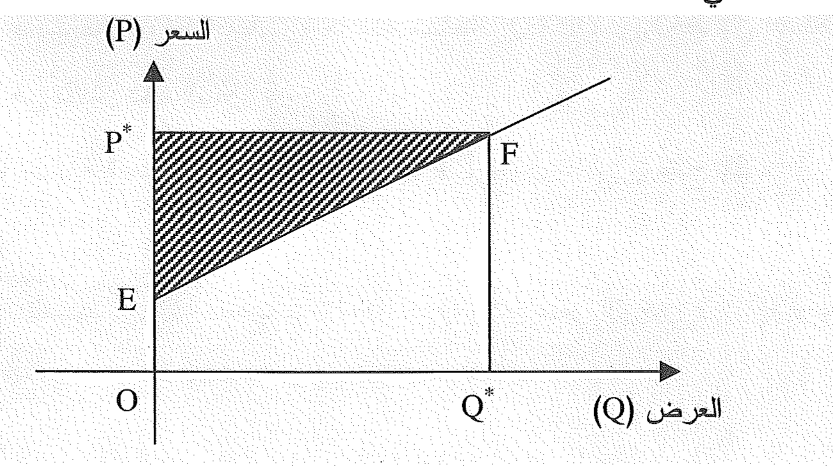
$$(5)(4)-\frac{1}{4}(4)^2-(3)(4)$$

$$20-4-12=4$$

جـ) حساب فائض المنتج Producer surplus:

لنفرض أن دالة العرض Q من قبل المنتج هي $Q = a + bp$ حيث أن p هو السعر وأن a و b هما عددان حقيقيان.

وبما أن العرض دالة متزايدة increasing في السعر فإن الثابت b يجب أن يكون موجباً positive ($b > 0$). وليكن p^* و Q^* هما سعر وكمية التوازن على التوالي فعندئذٍ يكون فائض المنتج producer surplus هو المساحة المظللة في الشكل التالي:



وبنفس الأسلوب السابق فإن حساب هذه المساحة المظللة هي تكامل دالة السعر p بين 0 و Q^* مطروحة من مساحة المستطيل المساوي إلى P^*Q^* والمثال التالي لتوضيح ذلك:

مثال 11

إذا علمـــت أن دالة العرض $Q = -6 + 3p$ وكان سعر التوازن $P^* = 5$ أوجد فائض المنتج.

إذا كانت دالة العرض $Q = -6 + 3\,p$ فإن دالة السعر P ستكون:

$P = 2 + \frac{1}{3}Q$. وإن كـــان ســـعر التوازن $P^* = 5$ فإن كمية التوازن $Q^* = 9$

وعليه يكون فائض المنتج هو:

$$P^*Q^* - \int_0^{Q^*}(2 + \frac{1}{3}Q)dQ$$

$$(5)(9) - \left[2Q + \frac{1}{6}Q^2\right]_0^9$$

$$(5)(9) - (2)(9) - \frac{1}{6}(9)^2$$

$$45 - 18 - \frac{81}{6} = \frac{81}{6}$$

أسئلة الفصل الثامن
Exercises for chapter eight

أوجـد الـتكامل لكـل مما يأتي find the integral for the following للأسئلة (10-1):

1) $\int (x^2 + 3x - 5)dx$

2) $\int (\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 9x + \sqrt{5})dx$

3) $\int (\sqrt{x} + x)dx$

4) $\int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + x)dx$

5) $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})dx$

6) $\int (\frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5} - x + 5)dx$

7) $\int (4x^2 - e^x + \sqrt{x})dx$

8) $\int x^2(x+1)dx$

9) $\int (x+1)(x-1)dx$

10) $\int (x^3 + 1)(\frac{1}{x} + x)dx$

أوجـد الـتكامل لكل مما يأتي find the integral for the following مستخدماً طرق التكامل المختلفة للأسئلة (11-24):

11) $\int \frac{dx}{4 + 9x^2}$

12) $\int \frac{dx}{4x \ln x}$

13) $\int \frac{dx}{3x - \sqrt{3}}$

14) $\int (2x-1)^3 dx$

15) $\int x^2 e^x dx$

16) $\int x\, e^{2x} dx$

17) $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$

18) $\int 2x\sqrt{1 + x^2}\,dx$

19) $\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1)dx$

20) $\int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\;\; dx$

21) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

22) $\int \frac{2xdx}{x^2+3}$

23) $\int x^2 e^{-4x} dx$

24) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

Find the definite integral for the following للأسئلة (25-30): **أوجـد قيمة التكامل المحدود لكل مما يلي**

25) $\int_{-1}^{1} (x^2 + 5x - 3) dx$

26) $\int_{1}^{5} (x^2 - \sqrt{x} + 10) dx$

27) $\int_{0}^{5} e^{-x} dx$

28) $\int_{-4}^{0} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x}} dx$

29) $\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} \ dx$

30) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

حل التمارين التالية Solve the following للأسئلة (31-33):

31) Find the total cost function Y given that the marginal cost function $\frac{dy}{dx}$ is:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2e^{-x} + 5$$

and the fixed cost is 20.

32) Find the total revenue function Y if the marginal revenue function is:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5$$

33) If the demand function for the consumer is Q = 7P – 9 and the supply function for the producer is Q = 2p + 30

Where Q is the demand and the supply quantity and p is the price. Find the consumer surplus and the producer surplus.

أوجد فائض المستهلك وفائض المنتج.

المراجع

المراجع

1- Anton, Harward "Calculus" 6th ed. New York: Wiley & Son, Inc. 1999.

2- Arya Y.C. and R.W. Lardner "Mathematical Analysis for Business, Econ. and the life & Social sciences". 4th ed. Prentice Hall Int. eds. 1993.

3- Barnett R.A and Ziegler M.R. "Finite Mathematics for Management, Life & Social Sciences" Dellen publishing company 1987.

4- Tan S.T. "Applied Finite Mathematics". 2nd ed. Pws-kent publishing company 1987.

5- Jagdish C. A and Robin W.L. "Manthematical Analysis" 4th ed. 1998.